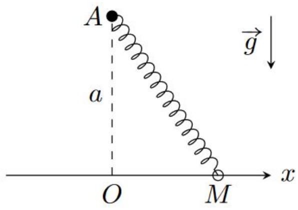
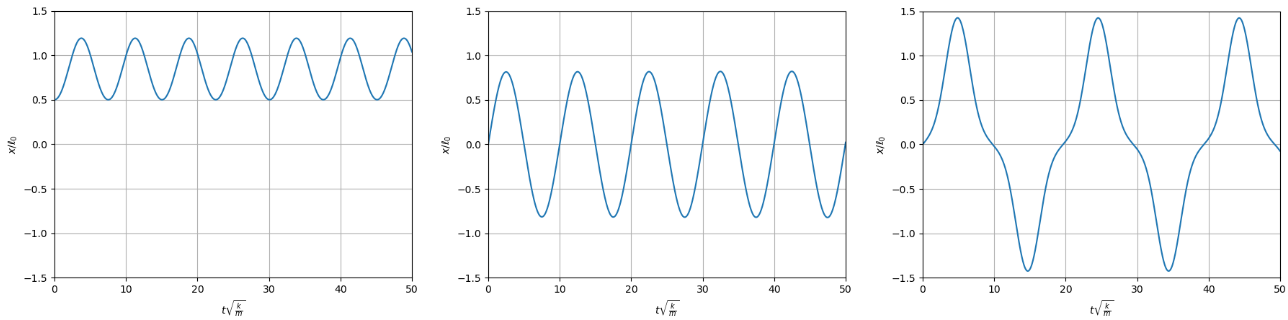
# 1 Bifurcation d'un système masse-ressort

On considère un petit anneau, assimilé à un point matériel de masse $m$, astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige horizontale. Cet anneau est accroché à un ressort de longueur à vide $\ell_0$ et de constante de raideur $k$, dont l'autre extrémité est fixée en un point $A$ situé à la distance $a$ de la tige.




1. Le mouvement de l'anneau est-il conservatif ?
2. Établir l'expression de l'énergie potentielle $E_\text{p}(x)$.
3. Déterminer les positions d'équilibre et leurs conditions d'existence.
4. Étudier la stabilité de la position d'équilibre $x_\text{éq} = 0$. En déduire la stabilité des autres positions d'équilibre.
5. Tracer l'allure du graphe $E_\text{p}(x)$ pour $a \leq \ell_0$ et $a > \ell_0$.
6. Établir l'équation du mouvement vérifiée par $x(t)$.
7. On a représenté le graphe $x(t)$ dans 3 cas. Dans chaque cas, que peut-on dire de $a/\ell_0$ et de $E_\text{m}$ ?



# 2 Potentiel interatomique

L'énergie potentielle d'interaction entre deux atomes susceptibles de former une liaison covalente peut être modélisée par le potentiel de Morse :

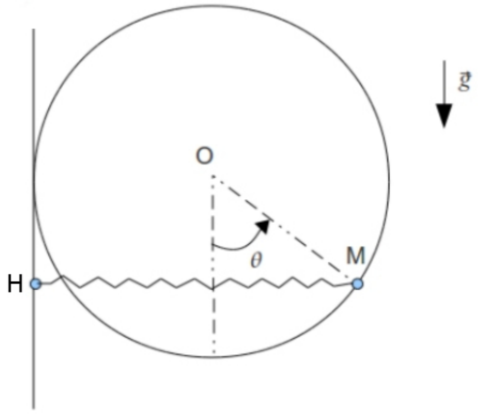
$$E_\text{p}(r) = D_e \left(1 - e^{-a(r-r_0)}\right)^2$$

où $r$ est la distance entre les deux atomes et $D_e$, $a$ et $r_0$ sont des constantes positives.

1. Préciser les dimensions de $D_e$, $a$ et $r_0$.
2. Tracer l'allure du graphe $E_\text{p}(r)$.
3. Déterminer la longueur de la liaison covalente formée par les 2 atomes.
4. Pour quelles valeurs de l'énergie mécanique les deux atomes sont-ils liés ? En déduire l'énergie de liaison, c'est-à-dire l'énergie nécessaire pour briser la liaison.
5. Montrer qu'au voisinage de la position d'équilibre, la liaison est équivalente à un ressort dont on donnera les expression de la longueur à vide $\ell_0$ et de la constante de raideur $k$ en fonction $r_0$, $D_e$ et $a$.
6. Le dihydrogène a une énergie molaire de liaison de 436 kJ/mol et un paramètre $a = 19,3 \times 10^9\ \text{m}^{-1}$. Estimer la période de vibration d'une molécule de dihydrogène. On admet que pour tenir compte du mouvement des 2 atomes d'hydrogènes, il faut considérer la masse réduite $\mu = \frac{m}{2}$, où $m$ est la masse d'un seul atome.
7. Exprimer la force $\vec{F}$ exercée par un atome au point $O$, sur un autre atome situé en $M$. Préciser le système de coordonnées utilisé.

## 3 Cerceau et ressort

Un anneau assimilé à un point matériel $M$ de masse $m$ peut coulisser sans frottements sur un cerceau vertical de rayon $R$ et de centre $O$. Le cerceau est fixe par rapport au référentiel du laboratoire considéré galiléen. L'anneau est accroché à un ressort de raideur $k$ et de longueur à vide $\ell_0 = R$. L'autre extrémité $H$ du ressort glisse sans frottement sur un axe vertical, tangent au cerceau, de sorte que **le ressort reste toujours horizontal**.




1. Montrer que le mouvement de $M$ est conservatif.
2. Montrer que l'énergie potentielle s'écrit

$$E_p = \frac{1}{2}kR^2 \sin^2\theta - mgR\cos\theta$$

3. Déterminer les positions d'équilibre. On distinguera 2 cas, selon la valeur du paramètre $\alpha = \frac{mg}{kR}$.
4. Étudier la stabilité de chaque position d'équilibre, selon les cas.
5. Représenter l'allure du graphe $E_p(\theta)$ dans chacun des 2 cas précédents.
6. Montrer qu'au voisinage de la position d'équilibre $\theta_{\text{éq}} = 0$, le système se comporte comme une oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation propre $\omega_0$. *On rappelle les développements limités de sin et cos, au voisinage de 0, à l'ordre 2 :*

$$\sin\theta = \theta + o(\theta^2)$$
$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)$$

7. L'anneau est maintenant soumis à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$.
   (a) Établir la nouvelle équation différentielle du mouvement au voisinage de $\theta_{\text{éq}} = 0$.
   (b) Décrire le mouvement au voisinage de $\theta_{\text{éq}} = 0$ selon les valeurs de $\lambda$.

## 4 Potentiel de Lennard-Jones

L'énergie potentielle de Lennard-Jones décrit l'interaction entre deux molécules. Elle s'écrit

$$E_p(r) = 4E_0\left[\left(\frac{d}{r}\right)^{12} - \left(\frac{d}{r}\right)^6\right]$$

où $r$ est la distance entre les molécules, et $E_0$ et $d$ sont des constantes. Le terme en $1/r^6$ correspond aux interactions de Van der Waals, tandis que le terme en $1/r^{12}$ est un terme empirique qui rend compte de la répulsion des nuages électroniques à courte distance.

1. Tracer l'allure du graphe $E_p(r)$
2. Montrer que la distance d'équilibre entre les deux molécules vaut $r_{\text{éq}} = 2^{1/6}d$.
3. Que vaut l'énergie de la liaison, c'est-à-dire l'énergie à fournir pour séparer deux molécules à la distance d'équilibre ?
4. Montrer qu'au voisinage de sa longueur d'équilibre, la liaison peut être modélisée par un ressort dont on donnera les expressions de la longueur à vide $\ell_0$ et de la constante de raideur $k$ en fonction de $E_0$ et $d$.