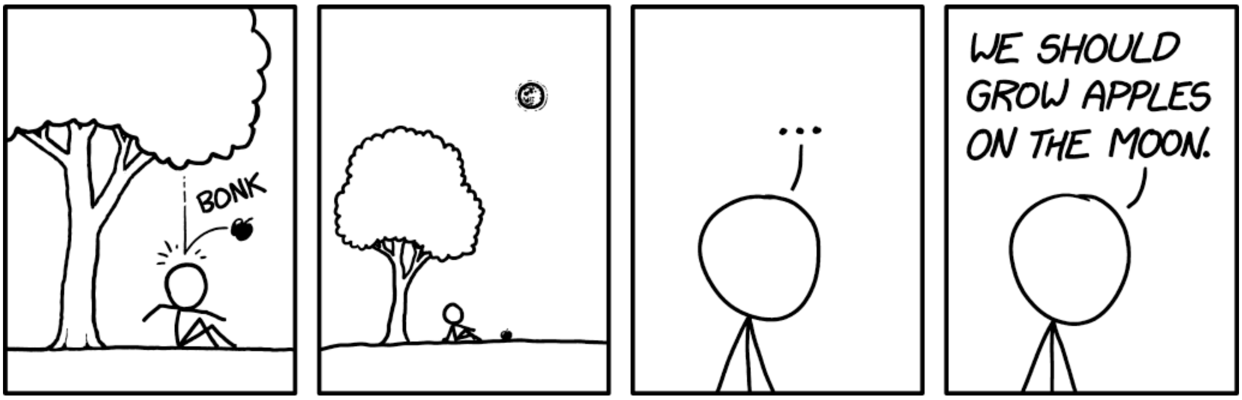


I Moment cinétique

1 Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point

On définit le moment cinétique du point M de masse m par rapport au point A par :

$$\boxed{\overrightarrow{L}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}}$$

2 Moment d'une force par rapport à un point

On définit le moment de la force $\overrightarrow{F}$, qui s'applique au point M, par rapport au point A par :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F}}$$

3 Théorème du moment cinétique en un point fixe

$$\boxed{\text{Dans un référentiel galiléen, } \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_A}{\mathrm{d}t} = \sum_{\overrightarrow{F}} \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F})}$$

Démonstration :

$$\frac{d\overrightarrow{L}_A}{dt} = \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{AM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Or pour un point A fixe, $\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} = \vec{v}$, colinéaire à $\vec{p}$, et dans un référentiel galiléen, $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \overrightarrow{F}$, donc

$$\frac{d\overrightarrow{L}_A}{dt} = \overrightarrow{AM} \wedge \sum \overrightarrow{F} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F})$$

II Mouvement dans un champ de force centrale conservatif

Un **champ de force centrale** est une force définie en tout point de l'espace pour laquelle il existe un point O tel qu'en tout point M, $\overrightarrow{F}(M)$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{F} = F_r\vec{u}_r$ dans la base locale associée aux coordonnées sphériques.

Un champ de force centrale est **conservatif**, si il existe une énergie potentielle $E_\mathrm{p}(M)$, telle que

$$\boxed{\mathrm{d}E_\mathrm{p} = -\overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}}, \text{ soit } \boxed{\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ E_\mathrm{p}}$$

$\overrightarrow{F}$ étant selon $\vec{u}_r$, E_p ne dépend que de r.[1] En coordonnées sphériques, $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi$, d'où $\mathrm{d}E_\mathrm{p} = -\overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -F_r\mathrm{d}r$, soit $F_r = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}$.

1. Le gradient en coordonnées sphériques s'écrit $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ E_\mathrm{p} = \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$. $\overrightarrow{F}$ est selon $\vec{u}_r$, donc $\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial \theta} = 0$ et $\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial \varphi} = 0$, c'est-à-dire que E_p ne dépend ni de θ, ni de φ.

1 Conservation du moment cinétique

Le théorème du moment cinétique en O, appliqué à un point M soumis à un champ de force centrale, s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge F_r\vec{u}_r = \vec{0}$$

Donc $\boxed{\text{le moment cinétique } \vec{L}_O \text{ est constant}}$

Conséquences :

a Mouvement plan

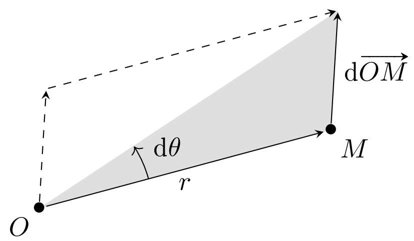
Comme le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal à $\vec{L}_O$ constant, le point M reste dans le plan orthogonal à $\vec{L}_O$ passant par O : **le mouvement est plan.**

On pose $\vec{u}_z = \frac{\vec{L}_O}{\|\vec{L}_O\|}$ le vecteur unitaire selon $\vec{L}_O$. On peut repérer le point M dans le plan du mouvement par ses **coordonnées polaires** (r, θ) de centre O (ou coordonnées cylindriques d'axe Oz avec $z = 0$).

b Loi des aires

En coordonnées polaires, $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, d'où $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$.
$\vec{L}_O$ se conserve, donc $\boxed{C = r^2\dot{\theta}}$ est une constante, appelée **constante des aires**.

La **vitesse aréolaire** est la dérivée de l'aire balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps , soit $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ où $\mathrm{d}S$ est l'aire infinitésimale balayée pendant $\mathrm{d}t$.



L'aire $\mathrm{d}S$ du triangle balayée pendant $\mathrm{d}t$ est la moitié de l'aire de parallélogramme construit à partir des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, donc [2]

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{OM}\|$$

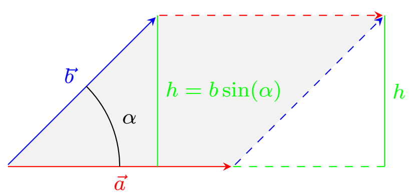
On en déduit la vitesse aréolaire : $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OM} \wedge \underbrace{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{v}}\| = \frac{1}{2}\frac{\|\vec{L}_O\|}{m} = \frac{|C|}{2}$

La vitesse aréolaire est donc constante. On en déduit la loi des aires (ou deuxième loi de Kepler) :
$\boxed{\text{le vecteur } \overrightarrow{OM} \text{ balaie des aires égales pendant des durées égales}}$

2 Conservation de l'énergie mécanique - Énergie potentielle effective

Le théorème de la puissance mécanique, appliqué à un point matériel M soumis uniquement à un champ de force centrale conservatif, s'écrit : $\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = 0$, donc $\boxed{\text{l'énergie mécanique est constante}}$

2.



L'aire du parallélogramme construit à partir de 2 vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, faisant un angle α est $S = ah = ab\sin(\alpha) = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$

$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$, donc $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}$

$$\begin{aligned} E_\mathrm{m} &= \frac{1}{2}mv^2 + E_\mathrm{p} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + E_\mathrm{p} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_\mathrm{p,eff} \end{aligned}$$

où $E_\mathrm{p,eff}(r) = E_\mathrm{p}(r) + \frac{mC^2}{2r^2}$ est l'**énergie potentielle effective**.

$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$ donc les valeurs de r accessibles sont telles que $E_\mathrm{m} \geq E_\mathrm{p,eff}(r)$, c'est-à-dire telles que la courbe représentative de $E_\mathrm{p,eff}(r)$ soit en dessous de la droite horizontale représentative de E_m constante.

— Si r est borné, on parle d'**état lié**,
— sinon, on parle d'**état de diffusion**.

III Cas particulier d'un champ newtonien

Un **champ newtonien** est un champ de force centrale conservatif de la forme :

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{u}_r}$$

Exemples :

— ***Force de gravitation*** *exercée par un astre ponctuel de masse M_O situé en O, sur une masse m :*

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}mM_O}{r^2}\vec{u}_r}$$

On identifie $K = \mathcal{G}mM_O$.

— ***Force électrique*** *exercée par une charge ponctuelle Q située au point O, sur une charge q :*

$$\boxed{\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r}$$

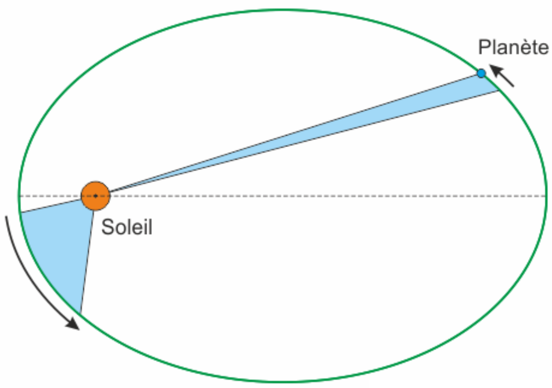
On identifie $K = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}$.

1 Lois de Kepler

Établies de manière empirique au XVII$^\mathrm{e}$ siècle, les lois de Kepler décrivent les mouvements des planètes dans le référentiel héliocentrique. On peut les transposer aux mouvements des satellites dans le référentiel géocentrique.

Première loi de Kepler (loi des orbites) Les trajectoires des planètes (ou orbites) sont des ellipses, dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Deuxième loi de Kepler (loi des aires) Le segment qui va du centre du Soleil au centre d'une planète balaye des aires égales pendant des durées égales.



On en déduit que la vitesse est maximale au périhélie (point de l'orbite le plus proche du Soleil) et minimale à l'aphélie (point de l'orbite le plus éloigné du Soleil).

Troisième loi de Kepler (loi des périodes) Le carré de la période de révolution d'une planète T est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'orbite a, soit

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}$$

2 Énergie potentielle et énergie potentielle effective

L'énergie potentielle associée à un champ newtonien est telle que $\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r} = \frac{K}{r^2}$, c'est-à-dire $E_\mathrm{p} = -\frac{K}{r} + \text{constante}$. On choisit la constante nulle, de sorte que $\lim\limits_{r\to+\infty} E_\mathrm{p}(r) = 0$, ainsi :

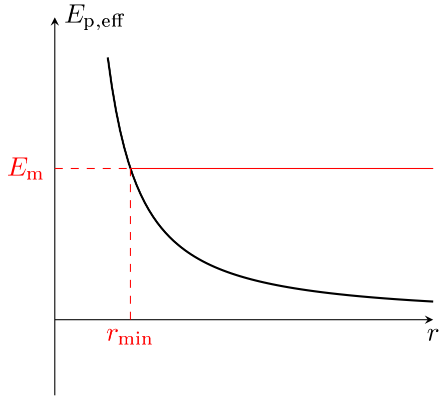
$$\boxed{E_\mathrm{p} = -\frac{K}{r}}$$

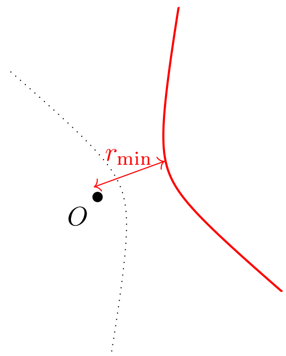
Par conséquent,

$$E_\mathrm{p,eff} = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{K}{r}$$

a Cas de l'interaction répulsive : $K < 0$

$\lim\limits_{r\to 0} E_\mathrm{p,eff} = +\infty$ et $\lim\limits_{r\to+\infty} E_\mathrm{p,eff} = 0^+$



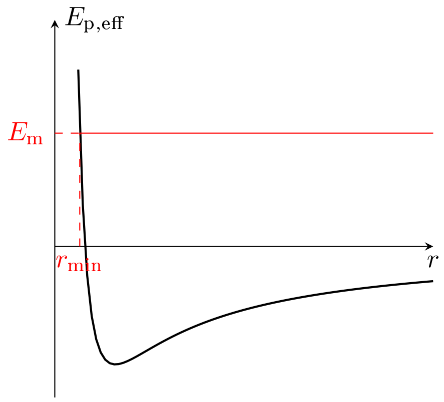


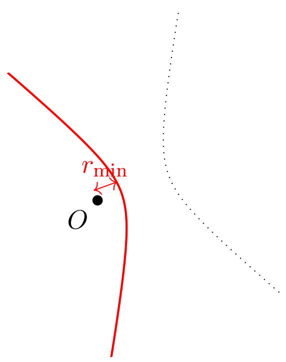
Le mouvement est non borné (**état de diffusion**).
$E_\mathrm{m} > 0$ et $E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{r}$, donc $\lim\limits_{r\to+\infty} v > 0$.
On en déduit que la trajectoire admet des asymptotes en $r \to +\infty$. C'est une branche d'**hyperbole** (dont O occupe le foyer le plus éloigné).

b Cas de l'interaction attractive : $K > 0$

$\lim\limits_{r\to 0} E_\mathrm{p,eff} = +\infty$ et $\lim\limits_{r\to+\infty} E_\mathrm{p,eff} = 0^-$. On distingue 3 cas selon la valeur de E_m.

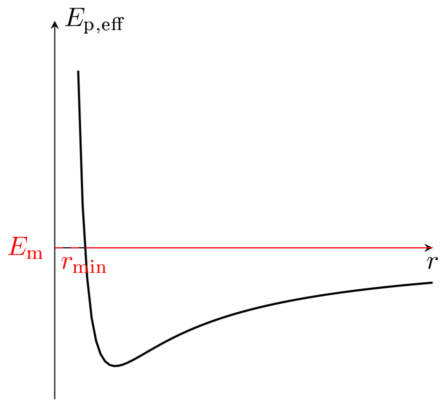
- $E_\mathbf{m} > 0$

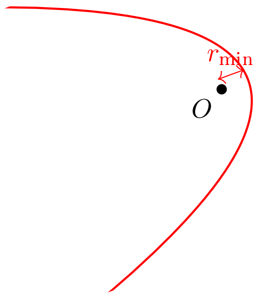




Dans ce cas, le mouvement est non borné (**état de diffusion**).
$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{r} > 0$ donc $\lim\limits_{r\to+\infty} v > 0$. On en déduit que la trajectoire admet des asymptotes en $r \to +\infty$. C'est une branche d'**hyperbole** (dont O occupe le foyer le plus proche).

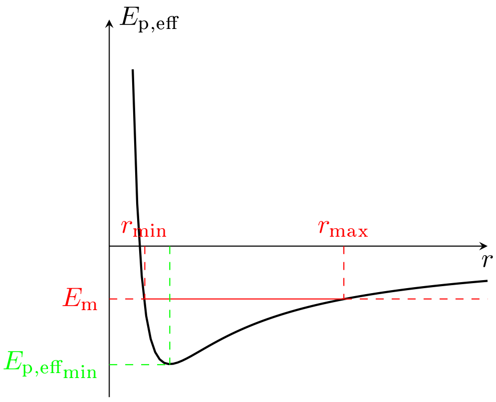
- $E_{\mathbf{m}} = 0$

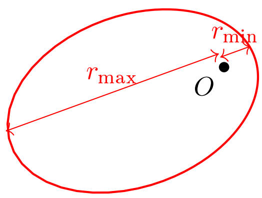




Dans ce cas, le mouvement est non borné (**état de diffusion**).
$E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{r} = 0$ donc $\lim\limits_{r\to+\infty} v = 0$. La trajectoire n'admet pas d'asymptotes. C'est une **parabole** (de foyer O).

- $E_{\mathbf{m}} < 0$





Dans ce cas, le mouvement est borné (**état lié**).
La trajectoire est une **ellipse** de grand-axe $2a = r_{\mathrm{min}} + r_{\mathrm{max}}$ (dont O occupe l'un des foyers).
Dans le cas particulier où $E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{p,eff}_{\mathrm{min}}}$, la trajectoire est circulaire de rayon $R = r_{\mathrm{min}} = r_{\mathrm{max}}$.

3 Cas particulier du mouvement circulaire

D'après la loi des aires, le mouvement sur une orbite circulaire est uniforme.

Dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon R, $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{u}_r$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m\vec{a} = \vec{F} = -\frac{K}{R^2}\vec{u}_r$, d'où

$$\begin{cases} mR\ddot{\theta} = 0 \\ -mR\dot{\theta}^2 = -\frac{K}{R^2} \end{cases}$$

De la projection selon $\vec{u}_\theta$, on retrouve $\dot{\theta} =$ constante, c'est-à-dire que le mouvement est uniforme. De la projection selon $\vec{u}_r$, on déduit

$$\dot{\theta}^2 = \frac{K}{mR^3} \tag{1}$$

a Période de révolution

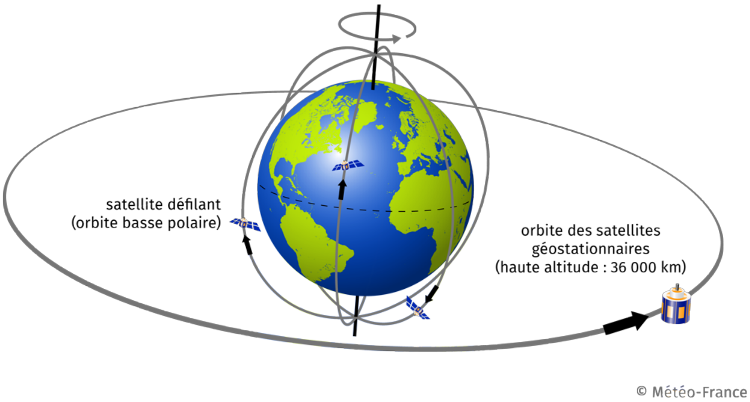
D'après l'équation (1), $\dot{\theta}^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{K}{mR^3}$ c'est-à-dire $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2 m}{K}$

On retrouve la troisième loi de Kepler, dans le cas particulier d'une trajectoire circulaire ($a = R$). On peut identifier la constante dans le cas de l'interaction gravitationnelle :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M} \tag{2}$$

b Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est immobile dans le référentiel terrestre, c'est-à-dire qu'il reste toujours au-dessus du même point de la Terre. Son orbite est nécessairement circulaire et située dans le plan équatorial.



Sa période de révolution dans le référentiel géocentrique doit être égale à la période de rotation de la Terre, soit un jour sidéral : $T \simeq 24$ h.[3] De l'équation (2), on déduit

$$R = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{G}M_\oplus T^2}{4\pi^2}}$$

On peut exprimer le paramètre gravitationnel terrestre $\mathcal{G}M_\oplus$ en fonction de la pesanteur terrestre $g \simeq 10$ m.s^{-2} et du rayon de la Terre $R_\oplus = 6,4 \times 10^3$ km . En effet, le poids est pratiquement la force de gravitation de la Terre, donc

$$P = mg \simeq \frac{\mathcal{G}mM_\oplus}{R_\oplus^2}$$

d'où $\mathcal{G}M_\oplus = gR_\oplus^2$. Ainsi,

$$R = R_\oplus + h = \sqrt[3]{\frac{gR_\oplus^2 T^2}{4\pi^2}}$$

L'altitude de l'orbite géostationnaire vaut $h = 3,6 \times 10^4$ km.

4 Énergie mécanique d'un état lié

a Cas du mouvement circulaire

En utilisant l'équation (1), on peut calculer

$$v^2 = (R\dot{\theta})^2 = \frac{K}{mR}$$

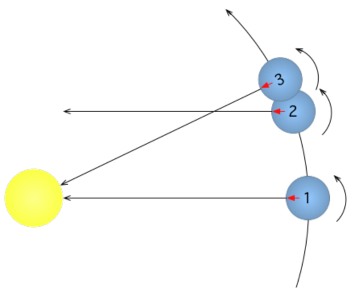
On en déduit l'énergie mécanique :

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{R}$$

$$\boxed{E_\mathrm{m} = -\frac{K}{2R}} \qquad (3)$$

3. Un jour sidéral est la durée que met la Terre pour faire un tour sur elle-même, indépendamment de sa révolution autour du Soleil. En raison de la révolution de la Terre autour du Soleil en même temps qu'elle tourne sur elle-même, le jour solaire dure quelques minutes de plus, soit 24 h en moyenne. En une révolution autour du Soleil, il y a 365 jours solaires, mais 366 jours sidéraux, d'où la durée d'un jour sidéral :

$$T_\text{sidéral} = \frac{365}{366} \times 24 \text{ h} = 23 \text{ h } 56 \text{ min}$$



b Cas du mouvement elliptique

L'expression (3) obtenue dans le cas du mouvement circulaire reste valable dans le cas d'un mouvement elliptique en remplacant R par le demi grand-axe a :

$$\boxed{E_{\mathrm{m}} = -\frac{K}{2a}}$$

Démonstration :

On cherche r_{min} et r_{max} tels que $\dot{r} = 0$, c'est-à-dire

$$E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{p,eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{K}{r}$$

c'est-à-dire

$$E_{\mathrm{m}} r^2 + Kr - \frac{mC^2}{2} = 0$$

Attention, $E_m < 0$ car il s'agit d'un état lié ! Les solutions s'écrivent

$$r_{\min} = \frac{-K + \sqrt{\Delta}}{2E_{\mathrm{m}}} \quad \text{et} \quad r_{\max} = \frac{-K - \sqrt{\Delta}}{2E_{\mathrm{m}}}$$

Or le grand-axe vaut

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{-K}{E_{\mathrm{m}}}$$