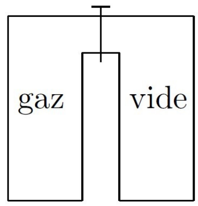
Expressions de la variation de la fonction d'état entropie

Pour un gaz parfait :
$$\begin{aligned}\Delta S = S_f - S_i &= C_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR\ln\left(\frac{V_f}{Vi}\right)\\ &= C_V \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right) + C_P\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)\\ &= C_P \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - nR\ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right)\end{aligned}$$

Pour une phase condensée incompressible et indilatable : $\Delta S = S_f - S_i = C\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$

1 Détente de Joule Gay-Lussac



On considère une enceinte à deux compartiments de même volume V_0, aux parois calorifugées et indéformables pouvant communiquer au moyen d'un robinet. A l'état initial, le compartiment de gauche contient une quantité n de gaz parfait à la température T_0, le compartiment de droite est vide. On ouvre alors le robinet.

1. Déterminer l'entropie créée au cours de la transformation. Interpréter.

On peut retrouver le résultat précédent par une approche statistique. Pour simplifier, on définit un micro-état par une donnée de type $(g,g,d,g,d,...)$, indiquant dans quel compartiment, gauche ou droite, se trouve chaque particule. On définit un macro-état par une donnée de type (N_g,N_d) indiquant le nombre de particules dans chaque compartiment. On note $\Omega(N_g,N_d)$ le nombre de micro-états réalisant le macro-état (N_g,N_d).

2. Préciser le macro-état initial, le macro-état final et les nombres de micro-états correspondants, en fonction du nombre total de particules N.

L'entropie d'un macro-état est donnée par la formule de Boltzmann

$$S = k_B \ln(\Omega)$$

où k_B est la constante de Boltzmann et Ω le nombre de micro-états réalisant le macro-état.

On donne la formule de Stirling : $N! \underset{N\to+\infty}{\sim} \left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2\pi N}$

3. Calculer ΔS par la formule de Boltzmann. Conclure.

2 Masse sur un piston

Une quantité n de gaz parfait est enfermée dans une enceinte cylindrique de section S, fermée par un piston de masse négligeable, pouvant coulisser verticalement sans frottement. On note T_0 et P_0, la température et la pression extérieures.

1. A l'instant initial, on pose une masse m sur le piston.
   (a) Montrer que l'entropie créée s'écrit $S_{\text{créé}} = nR\frac{mg}{P_0S} - nR\ln\left(1+\frac{mg}{P_0S}\right)$.
   (b) Étudier le signe de la fonction $f(x) = x - \ln(1+x)$. Commenter.
2. On réalise la même expérience mais en ajoutant la masse m petit à petit, par exemple en ajoutant du sable grain par grain. Déterminer l'entropie créée. Commenter.

3 Compression et détente adiabatiques d'un gaz parfait

Un gaz parfait, d'indice adiabatique γ est enfermé dans une seringue. On note V_0 le volume du gaz initialement à l'équilibre, et T_0 et P_0, la température et la pression du milieu extérieur. Un opérateur appuie progressivement sur le piston pour amener doucement le volume du gaz à $V_0/2$. La transformation est suffisamment rapide pour que les parois puissent être supposées athermanes.

1. Déterminer la pression P_1 et la température T_1 atteintes par gaz.
2. Déterminer le travail recu de deux manières différentes.

On relâche brutalement le piston et le gaz se détend. La transformation et suffisamment rapide pour que les parois puissent être supposées athermanes.

3. Déterminer le volume V_2 et la température T_2 atteints par le gaz.
4. Déterminer l'entropie créée au cours de la transformation.

4 Brique dans un bassin

Une brique de capacité thermique C, initialement à T_0, est placée dans un grand bassin d'eau à la température T_f.

1. Déterminer l'entropie créée.
2. Étudier le signe de la fonction $f(x) = x - \ln(x) - 1$. Commenter.

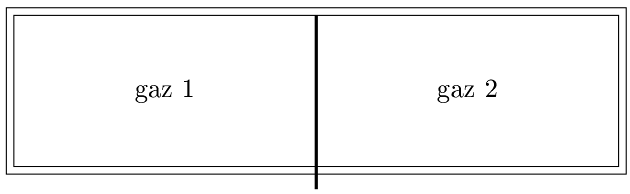
On opère maintenant par étapes. La brique, initialement à T_0, est mise successivement en contact avec N thermostats de températures

$$T_k = T_0 + k\frac{T_f - T_0}{N}, \qquad k \in [\![1,N]\!]$$

3. Déterminer l'entropie créée lorsque le nombre étapes N tend vers $+\infty$. On pourra considérer qu'à chaque étape la brique subit une transformation infinitésimale entre T et $T + \mathrm{d}T$.

5 Paradoxe de Gibbs

Une enceinte indéformable aux parois athermanes est divisées en deux compartiments étanches de même volume V_0, par une paroi amovible. A l'état initial, le compartiment 1 contient une quantité n d'un gaz 1 à la température T_0 et le compartiment de droite contient une même quantité n d'un autre gaz 2 à la même température T_0. Les gaz 1 et 2 sont de nature différente, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas la même formule chimique.



On retire la paroi séparant les deux compartiments et les deux gaz se mélangent.

1. Déterminer la température finale T_f.
2. Exprimer la pression finale P_f en fonction n, R, T_0 et V_0.
3. Établir l'expression de l'entropie créée, en fonction de n et R.
4. Pourquoi y-a-t-il un paradoxe dans le cas où les gaz 1 et 2 ont la même formule chimique ?[1]

1. Il s'agit du paradoxe de Gibbs, qui se résout en corrigeant l'expression de l'entropie pour tenir compte du fait que les molécules de même formule chimique sont indiscernables.

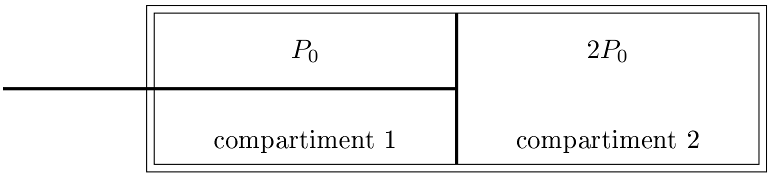
6 Effet Joule

Une résistance $R = 100\ \Omega$ de capacité thermique $C_R = 10$ J/K est plongée dans un récipient contenant $m = 100$ g d'eau ($c_e = 4{,}2$ J.K^{-1}.g^{-1}). A l'état initial, la température de l'eau et de la résistance est $T_0 = 20°$C. On impose au travers de la résistance un courant $I = 1$ A pendant une durée $\Delta t = 1$ min. L'expérience est réalisée à pression atmosphérique.

1. La température extérieure est constante égale à T_0. Calculer l'entropie créée au cours de la transformation, entre l'état initial et l'état final où le système a atteint l'équilibre thermique avec l'extérieur.
2. Le même courant passe dans la même résistance pendant la même durée, mais cette fois le récipient est calorifugé. Calculer l'entropie créée au cours de la transformation.
3. Quelle est la cause de l'irréversibilité dans chaque cas ?

7 Cylindre à deux compartiments

Un cylindre aux parois athermanes est séparé en deux compartiments, par un piston diatherme pouvant coulisser sans frottements. Chaque compartiment contient un même gaz parfait.
Le piston est initialement bloqué dans sa position centrale, de sorte que les deux compartiments ont un même volume initial V_0. La pression dans le compartiment 1 vaut P_0, tandis que la pression dans le compartiment 2 vaut $2P_0$. La température initiale vaut T_0.



A un instant $t = 0$, on libère le piston et on laisse le système évoluer librement.

1. Déterminer la température T_f, la pression P_f et les volumes V_{1f} et V_{2f} des deux compartiments à l'état final, en fonction de T_0, P_0 et V_0.
2. Montrer que l'entropie créée au cours de la transformation vaut

$$S_c = \frac{P_0 V_0}{T_0} \ln\left(\frac{32}{27}\right)$$

Quelle est la cause physique de l'irréversibilité ?

On reproduit la même expérience, mais cette fois-ci un opérateur retient le piston, de sorte que celui-ci se déplace vers sa position d'équilibre, de manière réversible. On note γ l'indice adiabatique du gaz parfait.

3. Rappeler l'expression de la capacité thermique à volume constant C_V d'un gaz parfait en fonction de n, R et γ.
4. Montrer que la température finale vaut

$$T_f = T_0 \left(\frac{27}{32}\right)^{\frac{\gamma-1}{3}}$$

5. Montrer que le travail recu par l'opérateur vaut

$$W_{\text{op}} = \frac{3P_0V_0}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{27}{32}\right)^{\frac{\gamma-1}{3}}\right]$$