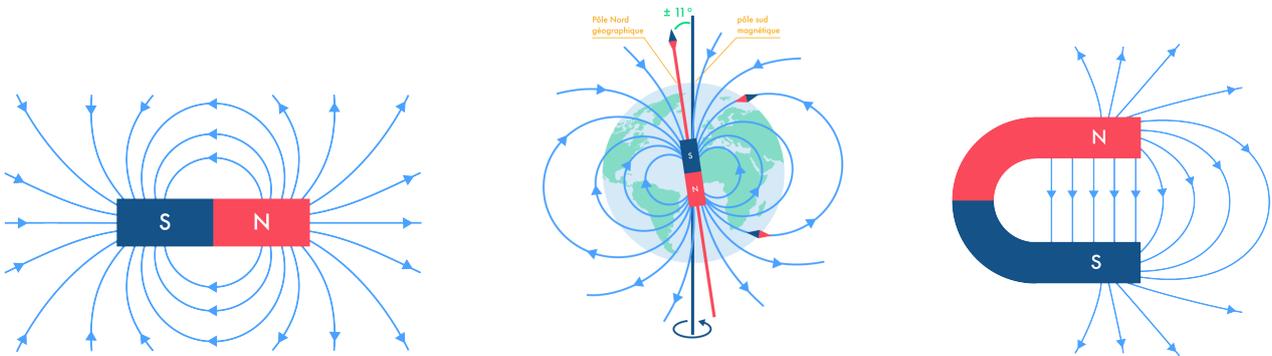


# I Champ magnétique

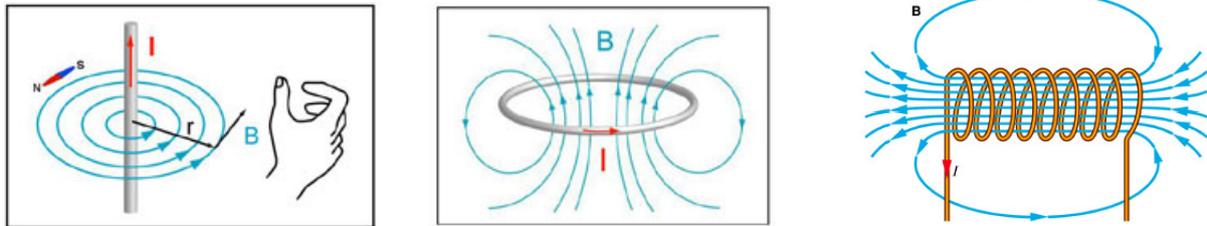
## 1 Sources de champ magnétique

Un champ magnétique peut être créé par un aimant ou un conducteur parcouru par un courant électrique. Une carte de champ permet de visualiser un champ vectoriel sous forme de lignes de champ. En tout point d'une ligne de champ, le champ est tangent et orienté dans le sens de la signe de champ.

### Champ magnétique créé par un aimant



### Champ magnétique créé par un courant



Dans une zone de champ uniforme les lignes de champ sont parallèles.  
 Dans une zone de champ fort, les lignes de champs sont serrées.

## 2 Ordres de grandeur

Champ magnétique au voisinage d'un aimant usuel	10 mT
Champ magnétique terrestre	50 $\mu$ T
Champ magnétique dans un appareil d'IRM	10 T

## 3 Dipôle magnétique - moment magnétique

On remarque la similitude des cartes de champ créé par un aimant et une boucle de courant. A l'extérieur d'un aimant les lignes de champ sont orientées du pôle nord vers le pôle sud. Par analogie on peut associer un pôle nord et un pôle sud à une boucle de courant (en utilisant la règle du tire-bouchon). Un aimant ou une boucle de courant constitue un **dipôle magnétique**.

Les pôles identiques (N-N ou S-S) de deux dipôles magnétiques se repoussent, les pôles différents (N-S) s'attirent.

On définit le **moment magnétique** d'une boucle de courant, de surface  $S$ , parcourue par un courant  $i$  :

$$\vec{m} = i\vec{S}$$

où  $\vec{S}$  est le vecteur surface de la boucle de courant, défini comme le vecteur

- orthogonal à la surface
- de norme  $S$
- orienté en fonction du sens de  $i$ , selon la règle du tire-bouchon.

Le moment magnétique est donc orienté du pôle sud vers le pôle nord. Par analogie, on peut associer un moment magnétique  $\vec{m}$  à un aimant.

## II Action d'un champ magnétique sur un conducteur parcouru par un courant

### 1 Densité linéique de force de Laplace sur un élément de courant

Un élément de conducteur  $d\ell$  parcouru par un courant  $i$  dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$  subit la force de Laplace :

$$\boxed{d\vec{F}_L = i d\ell \wedge \vec{B}}$$

Démonstration<sup>1</sup> :

La charge infinitésimale  $dq = idt$ , qui traverse une section du conducteur pendant  $dt$ , subit la force magnétique de Lorentz :  $\vec{F} = dq\vec{v} \wedge \vec{B}$ .

Soit  $d\ell = \vec{v}dt$  le déplacement de la charge  $dq$  pendant  $dt$ , alors l'élément de conducteur  $d\ell$  subit la force :  $d\vec{F} = i d\ell \wedge \vec{B}$ .

### 2 Résultante des forces de Laplace sur une barre conductrice

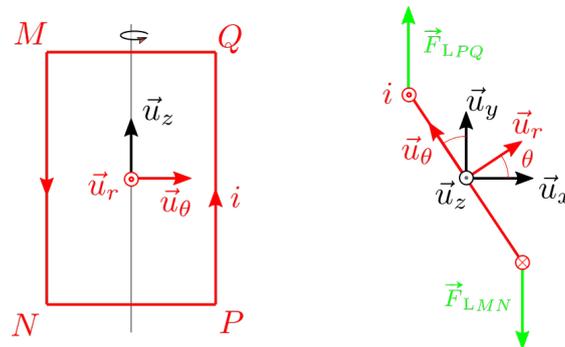
La résultante des forces de Laplace sur une barre conductrice  $MN$  parcourue par un courant  $i$  dans un champ magnétique extérieur uniforme, s'écrit :

$$\vec{F}_L = \int_M^N i d\ell \wedge \vec{B} = i \overline{MN} \wedge \vec{B}$$

Cette force s'applique au milieu de la barre.

### 3 Couple des actions de Laplace sur une spire de courant

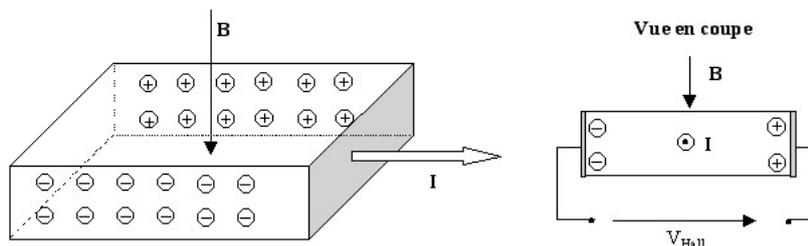
On considère une spire rectangulaire  $MNPQ$ , de côtés  $a = MN$  et  $b = NP$ , en liaison pivot d'axe  $Oz$ , parcourue par un courant  $i$ , dans un champ magnétique extérieur uniforme  $\vec{B} = B\vec{u}_x$ .



La résultante des forces de Laplace qui s'exercent sur la spire s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= i \overline{MN} \wedge \vec{B} + i \overline{NP} \wedge \vec{B} + i \overline{PQ} \wedge \vec{B} + i \overline{QM} \wedge \vec{B} \\ &= i (\overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PQ} + \overline{QM}) \wedge \vec{B} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

1. Cette démonstration n'est pas tout à fait rigoureuse, car la force de Laplace ne s'applique pas sur les porteurs de charges mobiles, mais sur le conducteur lui-même, c'est-à-dire sur les porteurs de charge fixes. En réalité sous l'effet de la force magnétique de Lorentz, une partie des porteurs de charge mobiles sont déviés et s'accumulent sur une des faces du conducteur. La différence de charge de part et d'autre du conducteur qui en résulte, génère un champ électrique  $\vec{E}_H$ , dit champ de Hall. C'est l'action du champ de Hall  $\vec{E}_H$  sur les porteurs de charge fixes qui est à l'origine de la force de Laplace.



Ainsi, les actions de Laplace exercent un couple sur la spire, dont le moment résultant par rapport à l'axe  $Oz$  s'écrit :

$$\Gamma_{Lz} = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{LMN}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{LNP}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{LPQ}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{LQM})$$

Les forces de Laplace sur chaque côté s'écrivent :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{LMN} &= i\overline{MN} \wedge \vec{B} = -iaB\vec{u}_y \\ \vec{F}_{LNP} &= i\overline{NP} \wedge \vec{B} = -ibB\vec{u}_z \\ \vec{F}_{LPQ} &= i\overline{PQ} \wedge \vec{B} = iaB\vec{u}_y \\ \vec{F}_{LQM} &= i\overline{QM} \wedge \vec{B} = ibB\vec{u}_z\end{aligned}$$

Le bras de levier de  $\vec{F}_{LMN}$  et  $\vec{F}_{LPQ}$  par rapport à  $Oz$  est  $\frac{b}{2} \sin \theta$ , donc

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{LMN}) &= -iaB\frac{b}{2} \sin \theta \\ \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{LNP}) &= 0 \\ \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{LPQ}) &= -iaB\frac{b}{2} \sin \theta \\ \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{LQM}) &= 0\end{aligned}$$

Ainsi,  $\Gamma_{Lz} = -iabB \sin \theta$ .

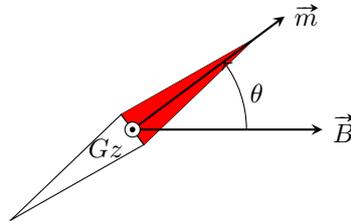
Or  $\vec{S} \wedge \vec{B} = -abB \sin \theta$ . On identifie donc le couple des actions de Laplace :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_L = \vec{m} \wedge \vec{B}}$$

où  $\vec{m} = i\vec{S}$  est le moment magnétique de la spire.

### III Action d'un champ magnétique uniforme sur un aimant

On considère un aimant, de centre de masse  $G$ , en liaison pivot d'axe  $Gz$  vertical, plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B\vec{u}_x$ .



Par analogie avec une boucle de courant, l'aimant subit un couple, exercé par le champ magnétique :

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}}$$

où  $\vec{m}$  est le moment magnétique de l'aimant.

#### 1 Équation du mouvement

L'aimant est soumis à

- son poids  $\vec{P}$ , de moment  $\mathcal{M}_{Gz}(\vec{P}) = 0$
- la réaction du support  $\vec{R}$ , de moment  $\mathcal{M}_{Gz}(\vec{R}) = 0$
- le couple des actions magnétiques, de moment  $\Gamma_z = (\vec{m} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z = -mB \sin(\theta)$

On applique le théorème du moment cinétique par rapport à  $Gz$  :

$$\frac{dL_{Gz}}{dt} = \mathcal{M}_{Gz}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{Gz}(\vec{R}) + \Gamma_z$$

où  $L_{Gz} = J\dot{\theta}$  avec  $J$  le moment d'inertie de l'aimant par rapport à  $Gz$ . L'équation du mouvement s'écrit :

$$J\ddot{\theta} = -mB \sin(\theta)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mB}{J} \sin(\theta) = 0$$

On pose  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mB}{J}}$ .

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$$

On retrouve l'équation du mouvement d'un **pendule**. Dans l'approximation des petits angles,  $\sin \theta \sim \theta$ ; on obtient alors l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0$ .

## 2 Positions d'équilibre - stabilité

Les positions d'équilibre sont telles que le moment résultant s'annule, c'est-à-dire  $\sin(\theta_{\text{eq}}) = 0$ .

Il y a 2 positions d'équilibre :  $\theta_{\text{eq}} = 0 [2\pi]$  et  $\theta_{\text{eq}} = \pi [2\pi]$ .

Pour étudier la stabilité d'une position d'équilibre  $\theta_{\text{eq}}$ , on étudie le signe du moment résultant en  $\theta_{\text{eq}} + \varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est une petite fluctuation autour de la position d'équilibre.

— En  $\theta = 0 + \varepsilon$ ,  $\Gamma_z = -mB \sin(0 + \varepsilon) \sim -mB\varepsilon$ .

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \Gamma_z < 0$  : le couple qui apparaît ramène l'aimant vers la position d'équilibre, donc la position d'équilibre  $\theta_{\text{eq}} = 0$  est stable.

— En  $\theta = \pi + \varepsilon$ ,  $\Gamma_z = -mB \sin(\pi + \varepsilon) = mB \sin(\varepsilon) \sim mB\varepsilon$ .

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \Gamma_z > 0$  : le couple qui apparaît écarte davantage l'aimant de la position d'équilibre, donc la position d'équilibre  $\theta_{\text{eq}} = \pi$  est instable.

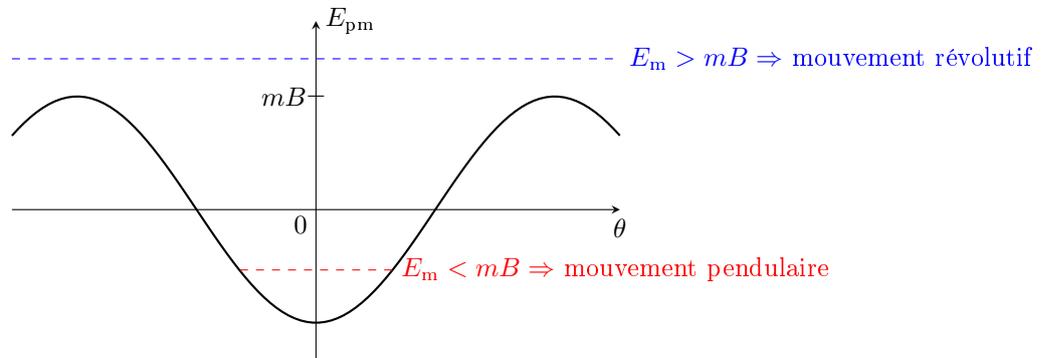
## 3 Énergie potentielle magnétique

D'après l'équation du mouvement,  $J\ddot{\theta} + mB \sin(\theta) = 0$ .

On en déduit une intégrale première du mouvement :  $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mB \cos(\theta) = \text{cste}$ .

$E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ , on identifie l'énergie potentielle magnétique d'un dipôle magnétique  $\vec{m}$  :

$$E_{\text{pm}} = -mB \cos(\theta) = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

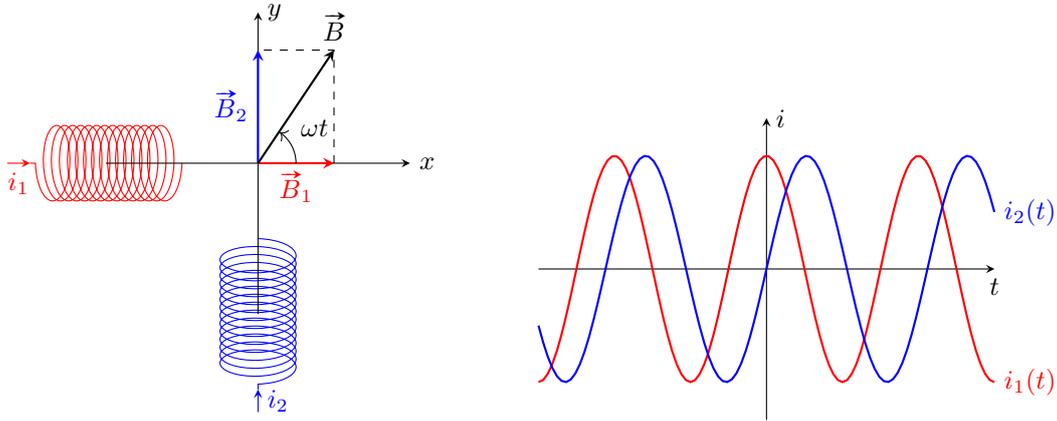


## IV Effet moteur d'un champ magnétique tournant

Comme le couple des actions magnétiques tend à aligner un moment magnétique  $\vec{m}$  dans la direction du champ magnétique  $\vec{B}$ . Un champ magnétique tournant permet de mettre en rotation un dipôle magnétique (aimant ou spire de courant) et donc de réaliser un moteur.<sup>2</sup>

### 1 Réalisation d'un champ magnétique avec 2 bobines alimentées en quadrature

On peut réaliser un champ magnétique tournant avec deux bobines décalées de  $\frac{\pi}{2}$ , alimentées en quadrature :  $i_1 = I \cos(\omega t)$  et  $i_2 = I \cos(\omega t \pm \frac{\pi}{2}) = \mp I \sin(\omega t)$ .



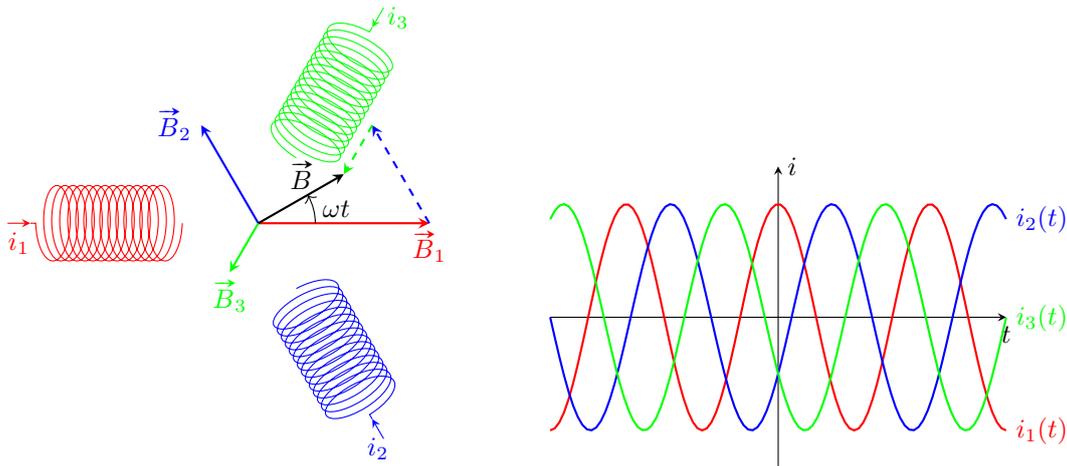
Le champ magnétique créé par une bobine est proportionnel à l'intensité du courant dans la bobine, donc  $\vec{B}_1 = B \cos(\omega t) \vec{u}_x$  et  $\vec{B}_2 = \mp B \sin(\omega t) \vec{u}_y$ .

Le champ résultant est alors  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = B [\cos(\omega t) \vec{u}_x \mp \sin(\omega t) \vec{u}_y]$ .

Il s'agit bien d'un champ tournant, à la vitesse de rotation  $\omega$ .

### 2 Réalisation d'un champ magnétique avec 3 bobines alimentées en triphasé

On peut réaliser un champ magnétique tournant avec 3 bobines décalées de  $\frac{2\pi}{3}$ , alimentées en triphasé :  $i_1 = I \cos(\omega t)$ ,  $i_2 = I \cos(\omega t \pm \frac{2\pi}{3})$  et  $i_3 = I \cos(\omega t \pm \frac{4\pi}{3})$ .



Le champ résultant  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$  est un champ tournant, à la vitesse de rotation  $\omega$ .

2. Dans ce cas, le dipôle magnétique tourne à même vitesse que le champ magnétique tournant. On parle de moteur synchrone.