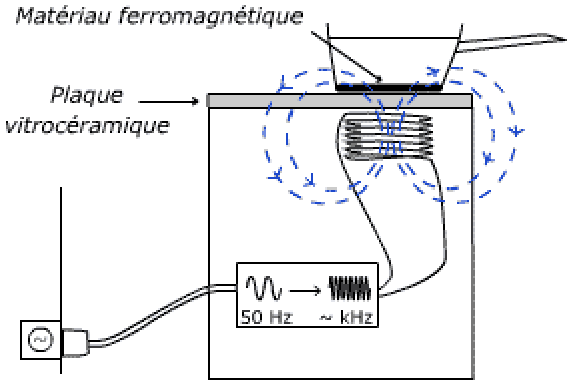
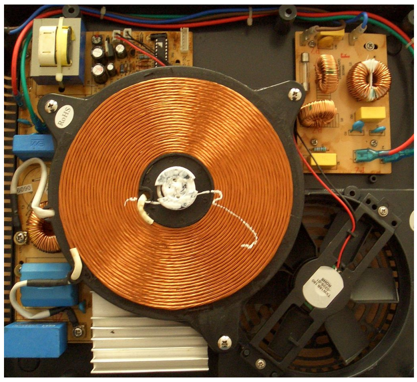
1 Plaque à induction

Une plaque à induction est constituée d'une bobine plate sous une plaque vitrocéramique. La bobine, parcourue par un courant sinusoïdal créé un champ magnétique variable au niveau du fond d'une casserole, posée sur la plaque de cuisson. Les variations de champ magnétique créent des courants induits dans le fond de la casserole, appelés courant de Foucault. L'effet Joule de ces courants permet de chauffer la casserole.



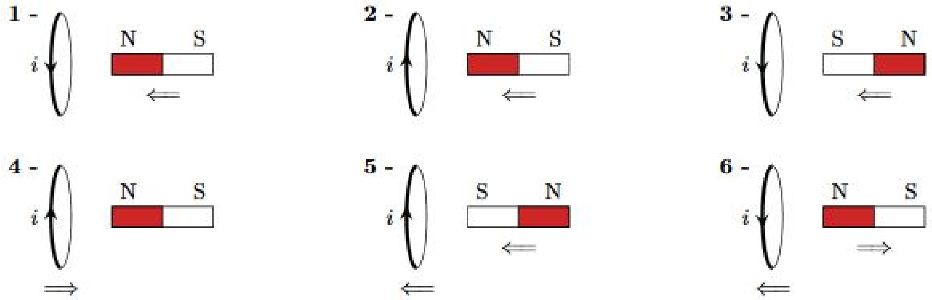


On modélise le circuit de la plaque de cuisson, par une bobine d'inductance L_1 et de résistance R_1, alimentée par un générateur de tension $e(t) = E\cos(\omega t)$. Le fond de la casserole est modélisé par un circuit d'inductance L_2 et de résistance R_2. On note M l'inductance mutuelle entre le circuit de la plaque et le fond de la casserole.

1. Faire le schéma électrique équivalent de la plaque et de la casserole.
2. Établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}$.
3. Établir l'expression de l'impédance d'entrée de la plaque $\underline{Z}_e = \dfrac{\underline{E}}{\underline{I}_1}$. La mettre sous la forme
$$\underline{Z}_e = R_e + jX_e$$
où R_e et X_e sont des réels, respectivement appelés résistance et réactance d'entrée de la plaque.
4. Montrer que
$$ei_1 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}$$
où $\mathcal{E}$ est une grandeur que l'on exprimera en fonction de i_1, i_2, L_1, L_2 et M.
Donner la signification physique de chaque terme.
5. On pose $i_1(t) = I_1\cos(\omega t + \varphi_1)$. Montrer que $e(t) = R_e I_1 \cos(\omega t + \varphi_1) - X_e I_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$.
6. Montrer qu'en moyenne
$$< R_1 i_1^2 >= \frac{1}{2} R_1 I_1^2 \qquad < e i_1 >= \frac{1}{2} R_e I_1^2 \qquad < \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} >= 0$$
En déduire $< R_2 i_2^2 >$ en fonction de R_1, R_e et I_1.
7. Définir le rendement η de la plaque à induction et établir son expression en fonction de R_1 et R_e.
8. Comment varie R_e avec ω ? En déduire comment varie η avec ω. Pourquoi la tension du secteur à 50 Hz est-elle transformée en une tension à plus haute fréquence ?
9. En supposant $\omega \gg \frac{R_1}{L_1}$ et $\omega \gg \frac{R_2}{L_2}$, simplifier les expressions de $\underline{H}$ et $\underline{Z}_e$. Comment varie M lorsqu'on soulève la casserole ? En déduire comment varient qualitativement I_1 et I_2, lorsqu'on soulève la casserole.

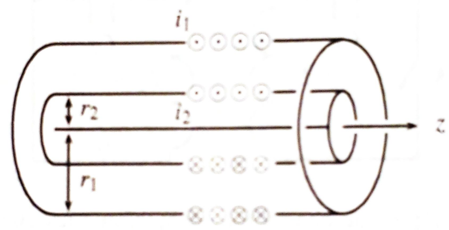
2 Signe du courant induit

Dans chacun des circuits ci-dessous, la spire circulaire et/ou l'aimant droit sont déplacés dans le sens indiqué par la double flèche. Prévoir le signe du courant i apparaissant dans la spire pendant le déplacement.



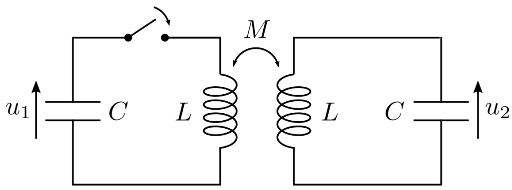
3 Solénoïdes imbriqués

On rappelle que le champ magnétique créé par un solénoïde infini est nul à l'extérieur du solénoïde, et vaut $B = \mu_0 n i$ à l'intérieur, où n est la densité linéique de spires. On considère deux solénoïdes de même axe, de même longueur ℓ, de rayons r_1 et r_2 (avec $r_2 < r_1 \ll \ell$), et comportant respectivement N_1 et N_2 spires.



1. Établir les expressions des inductances propres L_1 et L_2 des deux solénoïdes.
2. Établir l'expression de l'inductance mutuelle M entre les deux solénoïdes.
3. Comparer M avec $\sqrt{L_1 L_2}$. Dans quel cas a-t-on $M = \sqrt{L_1 L_2}$?

4 Oscillateurs couplés par induction mutuelle

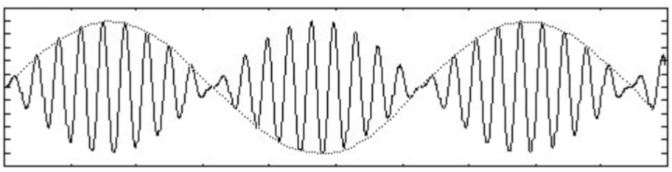


On considère deux circuits LC couplés par induction mutuelle. Le condensateur 1 est initialement chargé sous une tension E. A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

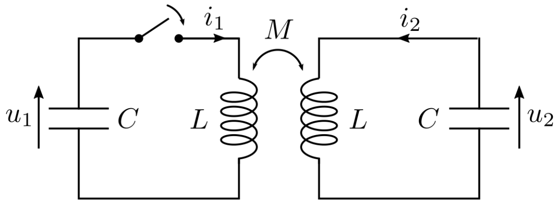
1. Établir le système de deux équations différentielles vérifié par u_1 et u_2.
2. On pose $s = u_1 + u_2$ et $d = u_1 - u_2$. Déterminer $s(t)$ et $d(t)$. En déduire $u_1(t)$ et $u_2(t)$.
   On pourra poser $\omega_s = \frac{1}{\sqrt{C(L+M)}}$ et $\omega_d = \frac{1}{\sqrt{C(L-M)}}$.

On suppose $M \ll L$.

3. Montrer que $\omega_s \simeq \omega_0(1-\varepsilon)$ et $\omega_d \simeq \omega_0(1+\varepsilon)$ où ω_0 et ε sont des constantes que l'on exprimera en fonction de L, M et C.
4. En déduire les expressions de $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sous la forme de produits de cosinus ou de sinus.
5. On a représenté ci-dessous l'oscillogramme de $u_1(t)$. Indiquer comment déterminer expérimentalement le rapport M/L, à partir de mesures de durées à l'oscilloscope.



4 Oscillateurs couplés par induction mutuelle



1. Les loi des mailles s'écrivent :

$$\begin{cases} u_1 - L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = 0 \\ u_2 - L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

Les lois de comportement des condensateurs s'écrivent $i_1 = -C\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$ et $i_2 = -C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$ (convention générateur), d'où le système :

$$\begin{cases} u_1 + LC\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} + MC\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} = 0 \\ u_2 + LC\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} + MC\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} = 0 \end{cases}$$

2. Par somme et différence des deux équations, on obtient

$$\begin{cases} s + (L+M)C\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = 0 \\ d + (L-M)C\frac{\mathrm{d}^2d}{\mathrm{d}t^2} = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \omega_s^2 s = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2d}{\mathrm{d}t^2} + \omega_d^2 d = 0 \end{cases}$$

Les solutions de ces équations différentielles sont les fonctions de la forme :

$$\begin{cases} s(t) = A\cos(\omega_s t) + B\sin(\omega_s t) \\ d(t) = C\cos(\omega_d t) + D\sin(\omega_d t) \end{cases}$$

Par continuité des tensions aux bornes des condensateurs et des intensités dans les bobines, on a :

$$\begin{cases} u_1(0^+) = u_1(0^-) = E \\ u_2(0^+) = u_2(0^-) = 0 \\ i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0 \\ i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} s(0) = E = A \\ d(0) = E = C \\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 0 = \omega_s B \\ \frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}t}(0) = 0 = \omega_d D \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} s(t) = E\cos(\omega_s t) \\ d(t) = E\cos(\omega_d t) \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{E}{2}\left[\cos(\omega_s t) + \cos(\omega_d t)\right] \\ u_2(t) = \frac{E}{2}\left[\cos(\omega_s t) - \cos(\omega_d t)\right] \end{cases}$$

3. On a

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}}\left(1+\frac{M}{L}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{LC}}\left(1-\frac{M}{2L}\right)$$

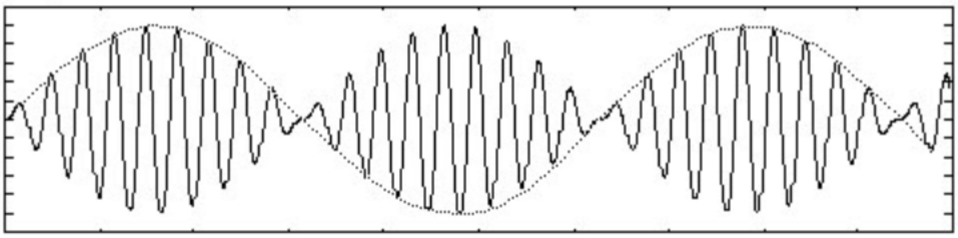
On identifie $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\varepsilon = \frac{M}{2L}$.
De même,

$$\omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}}\left(1-\frac{M}{L}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{LC}}\left(1+\frac{M}{2L}\right) = \omega_0(1+\varepsilon)$$

4. En utilisant $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, on obtient

$$\begin{cases} u_1(t) = E\cos(\omega_0 t)\cos(\varepsilon\omega_0 t) \\ u_2(t) = E\sin(\omega_0 t)\sin(\varepsilon\omega_0 t) \end{cases}$$

La période du premier cosinus (ou sinus) est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. La période du second est $\frac{2\pi}{\varepsilon\omega_0} = \frac{T_0}{\varepsilon}$. On a donc une fonction sinusoïdale de période T_0 modulée par une fonction sinusoïdale de période beaucoup plus grande. On parle de «battements».



En mesurant la petite période et la période des battements, on peut déduire ε, donc $\frac{M}{L}$.