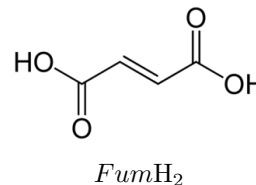
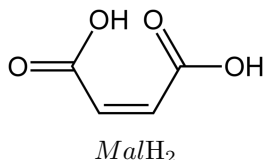


DS n° 6 de Physique-Chimie

Durée : 4h
Calculatrice autorisée

1 Étude de deux diastéréoisomères : acides maléique et fumarique

Les acides maléique (noté $MalH_2$) et fumarique ($FumH_2$) sont deux diacides carboxyliques éthyléniques diastéréoisomères l'un de l'autre.



1.1 Températures de fusion

1. Prévoir lequel des deux acides a la température de fusion la plus élevée. Justifier en vous appuyant sur un schéma.

1.2 Titrage de l'acide maléique seul

Le titrage d'une solution aqueuse d'acide maléique $MalH_2$ de concentration en quantité de matière C_0 inconnue à l'aide de soude de concentration en quantité de matière $C = 0,100 \text{ mol.L}^{-1}$ est simulé. La courbe donnant l'évolution du pH lors de l'addition de soude dans un bécher contenant initialement un volume d'essai $V_0 = 0,100 \text{ L}$ de solution d'acide maléique est représentée figure 7.

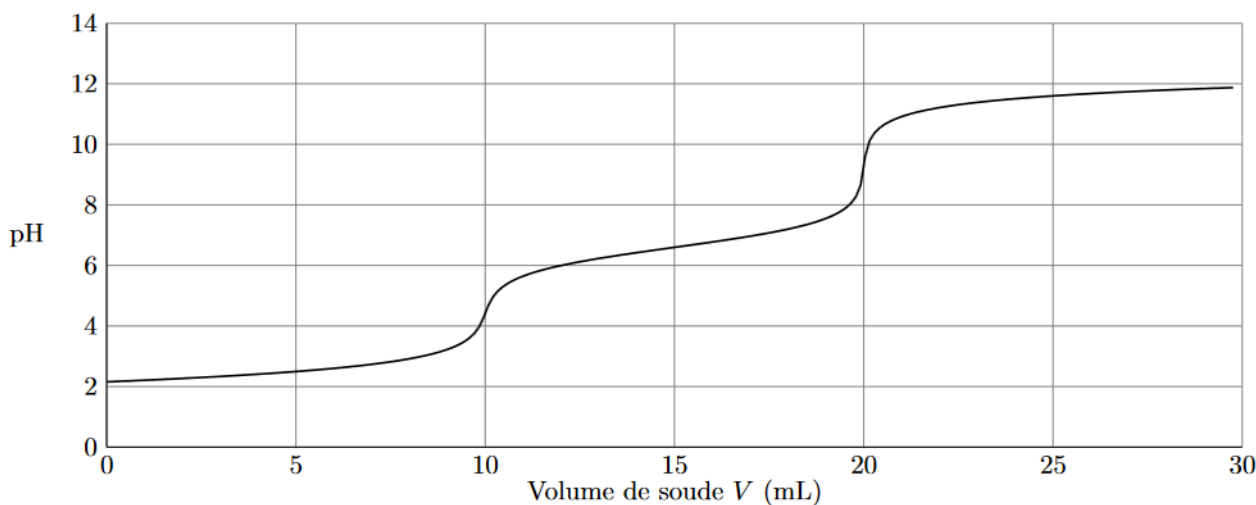


Figure 7 Courbe simulée du titrage de l'acide maléique par la soude suivie par pH-métrie

2. Écrire la (ou les) réaction(s) de titrage et interpréter qualitativement cette courbe.
3. En déduire la valeur de la concentration C_0 .
4. Évaluer très simplement $pK_{A2}(MalH^-/Mal^{2-})$ à l'aide de cette courbe.

On donne $pK_{A1}(MalH_2/MalH^-) = 1,8$.

5. Représenter le diagramme de prédominance de l'acide maléique.
6. Peut-on retrouver la valeur du $pK_{A1}(MalH_2/MalH^-)$ de manière analogue à celle du $pK_{A2}(MalH^-/Mal^{2-})$? Justifier.
7. Retrouver la valeur du pH pour un volume de soude versé $V = 0$, par le calcul.

1.3 Titrage de l'acide fumarique seul

La simulation du titrage d'une solution aqueuse d'acide fumarique FumH_2 de concentration en quantité de matière C'_0 inconnue est réalisée dans les mêmes conditions que pour l'acide maléique. La courbe obtenue est représentée figure 8.

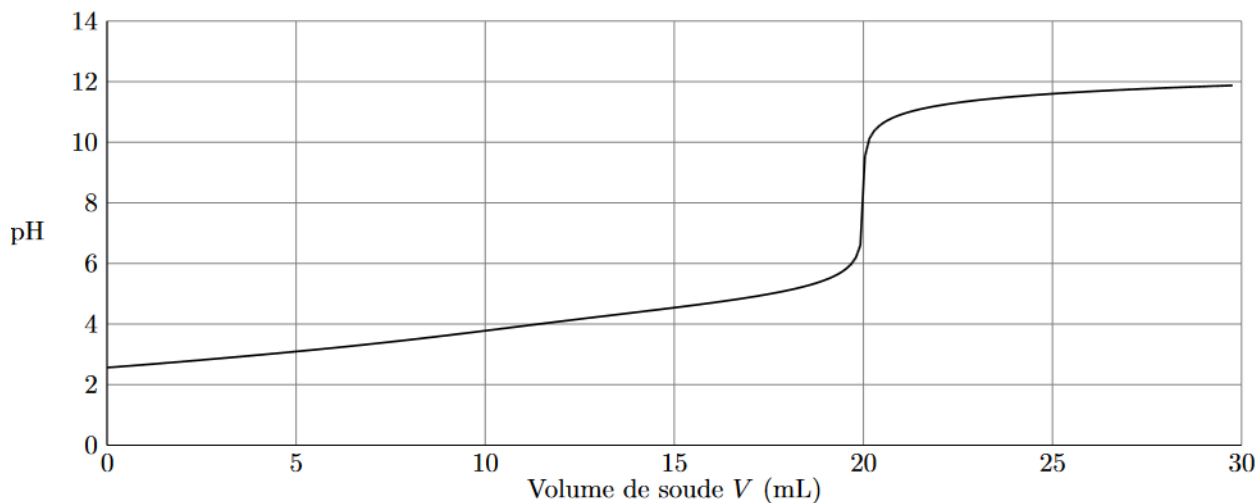


Figure 8 Courbe simulée du titrage de l'acide fumarique par la soude suivi par pH-métrie

Les valeurs des pK_A de l'acide fumarique sont $pK'_{A1}(\text{FumH}_2/\text{FumH}^-) = 3,0$ et $pK'_{A2}(\text{FumH}^-/\text{Fum}^{2-}) = 4,5$.

8. Interpréter cette courbe de titrage et en déduire la valeur de la concentration C'_0 .

1.4 Titrage d'un mélange d'acides maléique et fumarique

La courbe simulée du titrage d'une solution aqueuse comportant un mélange d'acide maléique de concentration en quantité de matière C_M et d'acide fumarique de concentration en quantité de matière C_F est donnée figure 9. La dérivée de la courbe simulée $\text{pH} = f(V)$ est aussi tracée; elle présente un léger maximum pour un volume versé de 14,5 mL et un maximum très prononcé pour 21,0 mL. Ces courbes ont été obtenues à partir d'un volume de prise d'essai du mélange titré de $V'_0 = 50,0$ mL et d'une solution titrante de soude de concentration en quantité de matière $C = 0,100$ mol.L⁻¹.

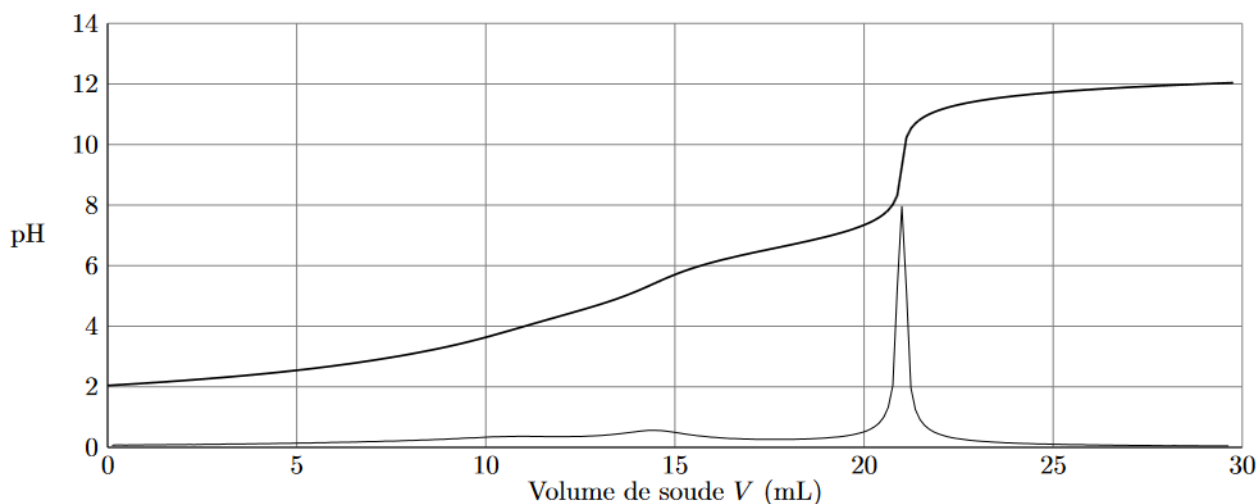


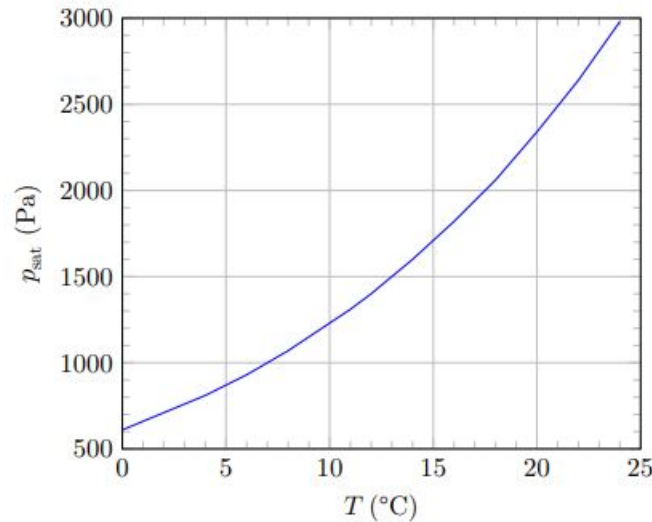
Figure 9 Courbe simulée du titrage d'un mélange d'acide maléique et fumarique suivi par pH-métrie

9. Déterminer les valeurs des concentrations C_M et C_F , en justifiant la méthode mise en œuvre.
10. Cette méthode vous semble-t-elle précise pour déterminer simultanément C_M et C_F ? Justifier.

2 Grandeurs caractérisant un air humide

L'air renferme toujours une proportion d'eau sous forme vapeur. On le qualifie d'air humide et on le caractérise par

- son humidité absolue $x = m_v/m_{as}$ où m_v et m_{as} sont respectivement les masses de vapeur d'eau et d'air sec dans un volume V quelconque d'air humide ;
- son humidité relative HR (ou degré hygrométrique) à la température T : $HR = \frac{p_v(T)}{p_{sat}(T)}$ où p_v est la pression partielle en vapeur d'eau et p_{sat} la pression de vapeur saturante dont la dépendance avec la température est donnée ci-dessous.



Dans la suite, l'air humide sera étudié comme un mélange de deux gaz parfaits : l'air sec (indice as) et la vapeur d'eau (indice v). La pression totale p de l'air humide sera considérée constante et égale à $p = 1,013$ bar.

Données -

- masse molaire de l'air sec : $M_{as} = 29$ g/mol
- masse molaire de l'eau : $M_e = 18$ g/mol
- constante des gaz parfaits : $R = 8,31$ J.K⁻¹.mol⁻¹

11. Montrer que $x = d \frac{p_v}{p - p_v}$ où $d = M_e/M_{as}$.

12. Calculer la valeur maximale de l'humidité absolue x_{sat} de l'air humide à la température $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

On considère une chambre hermétiquement fermée de volume $V = 40$ m³ occupée par une personne qui se couche à 22 h. La température de la pièce est de 18°C et l'humidité relative est de 50%. La chambre n'est pas chauffée et la température au lever à 8 h le lendemain matin est de 16°C. Un être humain produit de la vapeur d'eau avec un débit massique de 30 à 200 g/h, selon son activité.

13. Au lever, l'occupant de la chambre constate-t-il une condensation de l'eau ? La réponse doit s'appuyer sur un raisonnement quantitatif.

Le problème de la condensation peut être résolu en aérant les pièces du logement suffisamment et régulièrement. Certaines personnes sont réticentes à aérer lors des journées humides où l'air extérieur est froid et saturé en vapeur d'eau.

Considérons une pièce initialement à la température $T_i = 20^\circ\text{C}$ et saturée en vapeur d'eau. L'air extérieur est à la température $T_a = 10^\circ\text{C}$ et est aussi saturé en vapeur d'eau. On renouvelle entièrement l'air de la pièce avec courant d'air.

14. Calculer l'humidité relative de l'air de la pièce après aération une fois que l'air est revenu à la température $T_i = 20^\circ\text{C}$ par contact avec les meubles, le plafond et les parois intérieures de la pièce. Conclure.

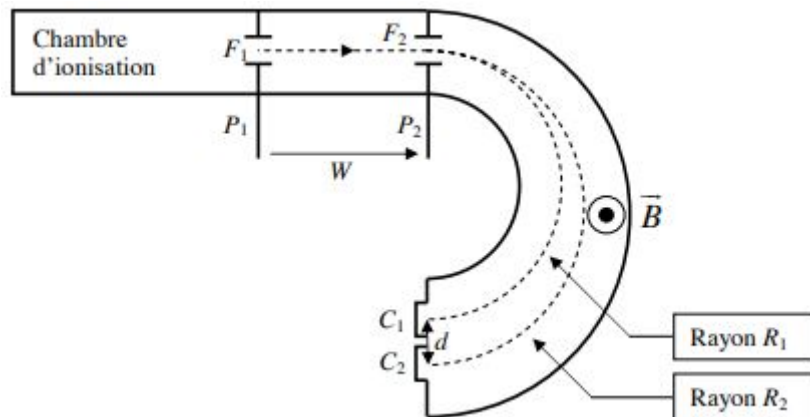
3 Mouvement de particules chargées et rayonnement

3.1 Mouvement dans un champ magnétique uniforme

On considère un référentiel galiléen. Une particule chargée de charge q positive de masse m pénètre avec un vecteur-vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$, perpendiculaire à \vec{v}_0 .

15. Montrer que le mouvement est circulaire uniforme et exprimer le rayon de la trajectoire R en fonction de m , v_0 , q et B .

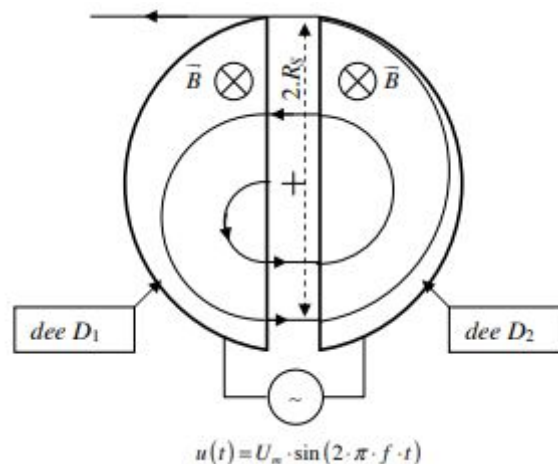
Pour séparer les deux isotopes naturels de l'uranium, l'uranium 235 et l'uranium 238, il avait été envisagé d'utiliser un spectrographe de masse. Cet appareil comporte trois parties, où règne un vide poussé. Les atomes d'uranium sont ionisés dans une chambre d'ionisation en ions U^+ d'où ils sortent par la fente F_1 avec une vitesse négligeable. Ces ions sont accélérés par un champ électrostatique uniforme imposé par une tension $W = V_{P_2} - V_{P_1}$ entre deux plaques P_1 et P_2 . Enfin, les ions pénètrent dans une chambre de déviation où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} ($B = 0,1 \text{ T}$) perpendiculaire au plan de la figure. Ils décrivent alors deux trajectoires circulaires de rayons R_1 et R_2 et parviennent dans deux collecteurs C_1 et C_2



16. Calculer la tension W pour que la distance entre les collecteurs soit égale à $d = 2 \text{ cm}$. On donne la masse d'un nucléon $m_n = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

3.2 Le cyclotron

Le cyclotron est formé de deux demi-cylindres conducteurs creux D_1 et D_2 , dénommés *dees* et séparés par un intervalle étroit. Un champ magnétique uniforme ($B = 1,0 \text{ T}$) règne à l'intérieur des *dees*, sa direction est parallèle à l'axe de ces demi-cylindres. Un champ électrostatique variable \vec{E} peut être établi dans l'intervalle étroit qui sépare les *dees* en appliquant une tension alternative sinusoïdale $u(t)$ qui atteint sa valeur maximale $U_m = 10^5 \text{ V}$ lorsque le proton traverse cet espace. Les protons de masse $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ et de charge électrique e , sont injectés au centre du cyclotron avec une énergie cinétique négligeable. Dans chaque *dee*, ils décrivent des trajectoires demi-circulaires de rayon croissant. Le rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron est $R_s = 50 \text{ cm}$.



17. Donner l'expression littérale de la durée $T_{1/2}$ mise par un proton pour effectuer un demi-tour en fonction de m_p , e et B .
18. Justifier le choix d'une tension $u(t)$ alternative. Quelle doit être sa fréquence? On négligera le temps de parcours d'un dee à l'autre.
19. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique des protons E_{cs} à la sortie du cyclotron. Calculer la valeur de E_{cs} en MeV.
20. Déterminer l'expression du nombre de tours N effectués par les protons dans le cyclotron jusqu'à leur sortie en fonction de e , R_s , B , m_p et U_m . Effectuer l'application numérique.
21. Dans le cadre de la théorie non-relativiste, une particule de charge q et d'accélération a rayonne une puissance P_r , donnée par la formule de Larmor

$$P_r = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide et μ_0 la perméabilité du vide qui vaut $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

- (a) Montrer qu'une particule de charge q , animée d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse v et de rayon R , rayonne une puissance P_r de la forme $P_r = \alpha v^4$. Exprimer le coefficient α en fonction de q , c , μ_0 et R .
- (b) Calculer l'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon $R_s = 50 \text{ cm}$. Conclure.

4 Lancement d'un satellite géostationnaire

On étudie le lancement d'un satellite à l'aide d'un lanceur (fusée), puis son placement sur l'orbite géostationnaire. Le lanceur décolle de l'équateur et amène le satellite sur une orbite elliptique de transfert. Le périhélie de l'orbite de transfert est à l'altitude de fin de combustion du dernier étage du lanceur, de l'ordre de 200 km. Son apogée se situe à l'altitude de l'orbite géostationnaire. Lorsque le lanceur atteint l'orbite de transfert, il se désolidarise du satellite qui rejoint seul l'orbite géostationnaire. Une fois arrivé à l'apogée, le satellite utilise un moteur intégré pour circulariser son orbite.

Dans la suite, on étudie le mouvement d'un satellite de masse $m = 10 \text{ t}$, assimilé à un point matériel M , dans le référentiel géocentrique de centre O , supposé galiléen.

Données :

- Rayon de la Terre : $R_{\oplus} = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$
 - Masse de la Terre : $M_{\oplus} = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$
 - Constante de gravitation : $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$
22. Exprimer la force de gravitation exercée par la Terre. Montrer que cette force est conservative, en établissant l'expression de l'énergie potentielle associée.
 23. Montrer que le mouvement est plan.

4.1 Orbite géostationnaire

On étudie le mouvement du satellite sur une orbite circulaire de rayon R .

24. Dans quel plan se situe l'orbite géostationnaire?
25. Montrer que le mouvement est uniforme et exprimer la vitesse v en fonction de \mathcal{G} , m , M_{\oplus} et R .
26. Établir la troisième loi de Kepler (loi des périodes) dans le cas particulier d'une trajectoire circulaire.
27. Calculer le rayon de l'orbite géostationnaire.
28. Établir l'expression de l'énergie mécanique E_m sur une orbite circulaire en fonction de \mathcal{G} , m , M_{\oplus} et R .

4.2 Orbite de transfert

Le point M est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) dans le plan du mouvement.

29. Montrer que $\mathcal{C} = r^2 \dot{\theta}$ est une constante du mouvement.
30. Énoncer puis démontrer la loi des aires.

31. Montrer que l'énergie mécanique se met sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$$

où $E_{p,\text{eff}}(r)$ est l'énergie potentielle effective dont on établira l'expression.

32. Représenter l'allure du graphe de $E_{p,\text{eff}}(r)$.
33. En déduire pour quelles valeurs de l'énergie mécanique E_m , le point M se trouve dans un état lié. Indiquer sur le graphe de $E_{p,\text{eff}}(r)$ les distances $r_P = OP$ et $r_A = OA$, où P et A sont respectivement le périégée et l'apogée de la trajectoire.
34. Sur un schéma représenter la Terre, l'orbite géostationnaire et l'orbite de transfert. Placer le périégée P et l'apogée A de l'orbite de transfert. Exprimer a le demi grand-axe de l'orbite de transfert en fonction de r_A et r_P .
35. Montrer que l'énergie mécanique sur l'orbite de transfert vaut

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}mM_\oplus}{2a}$$

36. Calculer la durée passée par le satellite sur l'orbite de transfert.

4.3 Besoins des manœuvres orbitales

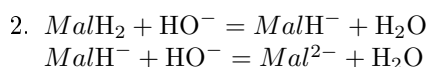
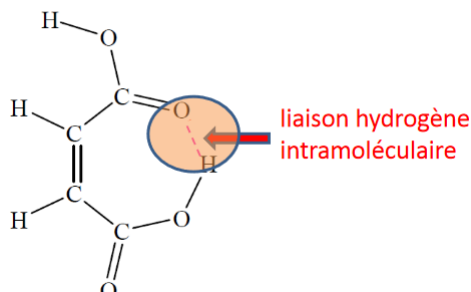
En raison de la propulsion par réaction, le travail fourni par les moteurs-fusées n'est pas intégralement reçu par le véhicule spatial, mais partagé entre le véhicule spatial et les gaz éjectés. Les besoins en ergol (mélange carburant/comburant utilisé pour produire l'énergie nécessaire à la propulsion) d'une manœuvre spatiale sont en réalité proportionnels à la variation de vitesse $\Delta v = v_f - v_i$ au cours de la manœuvre.

37. Calculer le Δv nécessaire pour rejoindre l'orbite de transfert depuis la Terre. On n'oubliera pas de prendre en compte la rotation de la Terre pour calculer la vitesse initiale.
38. Calculer le Δv nécessaire pour circulariser l'orbite une fois l'apogée de l'orbite de transfert atteinte.
39. Conclure sur la nécessité d'utiliser un lanceur. Pourquoi les orbites de transfert sont-elles encombrées de débris spatiaux ?

Correction du DS n° 6

1 Étude de deux diastéréoisomères : acides maléique et fumarique

1. L'acide maléique peut former des liaisons hydrogènes intra-moléculaires, donc l'acide fumarique forme plus de liaisons inter-moléculaires. C'est pourquoi la température de fusion de l'acide fumarique est plus élevée.



La courbe de pH présente deux sauts, donc les réactions sont **successives** ($K_1 \gg K_2$).

3. A la première équivalence, $n_{MalH_2, i} = n_{HO^-, vers}$, d'où $C_0V_0 = CV_{éq1}$ avec $V_{éq1} = 10,0$ mL, donc

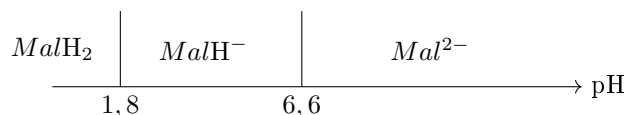
$$C_0 = \frac{CV_{éq1}}{V_0} = 1,00 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

On peut aussi utiliser la seconde équivalence : à la seconde équivalence, $2n_{MalH_2, i} = n_{HO^-, vers}$.

4. Entre les deux équivalences, à $V = (V_{éq1} + V_{éq2})/2$, la moitié de $MalH^-$ s'est transformée en Mal^{2-} , donc $[MalH^-] = [Mal^{2-}]$.

Or $K_{A2} = \frac{[Mal^{2-}]_h}{[MalH^-]}$, donc entre les 2 équivalences $pH = \boxed{pK_{A2} = 6,6}$

5.



6. Au début du titrage, $pH = 2,2$, donc $MalH^-$ prédomine déjà sur $MalH_2$, donc on ne peut jamais avoir $[MalH_2] = [MalH^-]$ c'est-à-dire $pH = pK_{A1}$

7. A $V = 0$, le bécher contient une solution d'acide maléique de concentration C_0 . La réaction prépondérante est :

| Etat | $MalH_2 + H_2O = MalH^- + H_3O^+$ | | | |
|---------|-----------------------------------|-------|-----|-----|
| initial | C_0 | excès | 0 | 0 |
| final | $C_0 - x$ | | x | x |

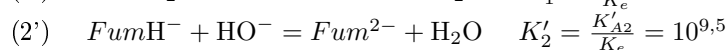
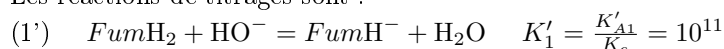
D'après la loi d'action de masse, $K_{A1} = 10^{-1,8} = \frac{x^2}{C_0 - x}$

Le pH final est dans le domaine de $MalH^-$, donc l'approximation de réaction limitée n'est pas valable.

On résout l'équation : $\frac{x^2}{K_{A1}} + x - C_0$.

On obtient $x = 6,95 \times 10^{-3}$ mol/L (ou $x = -2,28 \times 10^{-2}$ mol/L → impossible), donc $\boxed{pH = -\log(x) = 2,16}$

8. Les réactions de titrages sont :

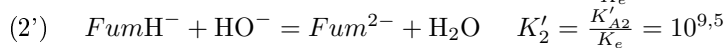
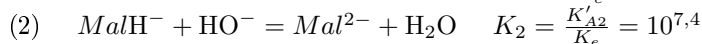
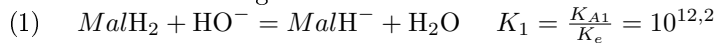


K'_1 et K'_2 n'étant pas très différentes, le titrage est **simultané** : on observe un seul saut de pH.

La réaction globale s'écrit : $FumH_2 + 2HO^- = Fum^{2-} + 2H_2O$.

A l'équivalence : $n_{FumH_2, i} = \frac{n_{HO^-, vers}}{2}$, c'est-à-dire $C'_0V_0 = \frac{CV_{éq}}{2}$ avec $V_{éq} = 20$ mL, d'où $\boxed{C'_0 = 1,00 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}}$

9. Les réactions de titrage sont :



K_1 , K'_1 et K'_2 sont du même ordre de grandeur, donc les réactions correspondantes sont simultanées. La réaction (2) correspond à la seconde équivalence. A la 1ere équivalence, $n_{MalH_2,i} + 2n_{FumH_2,i} = n_{HO^-}$, vers, donc $C_M V'_0 + 2C_F V_0 = C V_{\text{éq1}}$, où $V_{\text{éq1}} = 14,5$ mL.

A la 2nde équivalence, $n_{MalH_2,i} = n_{HO^-}$, vers entre les 2 équivalences, donc $C_M V'_0 = C(V_{\text{éq2}} - V_{\text{éq1}})$, où $V_{\text{éq2}} = 21$ mL. On en déduit $C_M = 1,3 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ et $C_F = 8,0 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$

10. Le 1er saut de pH étant très faible, l'incertitude sur $V_{\text{éq1}}$ est très grande, donc la méthode n'est pas très précise.

2 Grandeurs caractérisant un air humide

11. Pour la vapeur d'eau, $p_v V = n_v RT$

Pour l'air sec, $p_{as} = p - p_v$, d'où $(p - p_v)V = n_{as} RT$, donc

$$\frac{p_v}{p - p_v} = \frac{n_v}{n_{as}}$$

Or $m_v = n_v M_e$ et $m_{as} = n_{as} M_{as}$, donc

$$x = \frac{m_v}{m_{as}} = \frac{M_e}{M_{as}} \frac{p_v}{p - p_v}$$

12. L'humidité maximale est atteinte quand $p_v = p_{\text{sat}} = 2300$ Pa à $T_0 = 20^\circ\text{C}$

$$x_{\text{sat}} = d \frac{p_{\text{sat}}}{p - p_{\text{sat}}} = 1,4\%$$

13. On calcule la quantité initiale d'eau dans la pièce :

$$p_{vi} = HR p_{\text{sat}} \text{ avec } p_{\text{sat}} = 2100 \text{ Pa à } T_i = 18^\circ\text{C} = 291 \text{ K}$$

$$p_{vi} V = n_{vi} RT_i \text{ d'où } n_{vi} = 17,4 \text{ mol}$$

On calcule la quantité d'eau produite par la personne :

$$m_{v,\text{produite}} = 30 \text{ g/h} \times 10 \text{ h} = 300 \text{ g d'où } n_{v,\text{produite}} = \frac{m_{v,\text{produite}}}{M_e} = 16,7 \text{ mol}$$

La quantité totale d'eau au lever est donc $n_f = 34,1$ mol.

On suppose que toute l'eau est sous forme vapeur.

$$\text{Alors } p_{vf} V = n_f RT_f \text{ avec } T_f = 16^\circ\text{C} = 289 \text{ K, d'où } p_{vf} = 2047 \text{ Pa.}$$

Or à 16°C , on lit $p_{\text{sat}} = 1800 \text{ Pa} < p_{vf}$.

Donc l'hypothèse est invalidée : l'occupant constate une condensation et $p_{vf} = 1800 \text{ Pa}$ ($HR = 100\%$)

14. Pour l'air extérieur, $p_{va} = p_{\text{sat}} = 1250$ Pa à $T_a = 10^\circ\text{C} = 283 \text{ K}$.

La quantité d'eau n_e entrant dans la pièce vérifie $p_{va} V = n_e RT_a$.

Une fois l'air revenu à T_i , on a $p_v V = n_e RT_i$, donc

$$\frac{p_v}{p_{va}} = \frac{T_i}{T_a}$$

d'où $p_v = 1294$ Pa. Or à $T_i = 20^\circ\text{C}$, on lit $p_{\text{sat}} = 2300$ Pa. On en déduit

$$HR = \frac{p_v}{p_{\text{sat}}} = 56\%$$

L'aération permet bien de diminuer HR , évitant ainsi la condensation dans le logement.

3 Mouvement de particules chargées et rayonnement

3.1 Mouvement dans un champ magnétique uniforme

15. La force magnétique $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ ne travaille pas donc le mouvement est uniforme.

On utilise la base de Frenet, en choisissant le sens de rotation des ions comme sens positif : $\vec{v} = v_0\vec{t}$ et

$$\vec{a} = \frac{v_0^2}{R}\vec{n}$$

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qv_0B\vec{n}$$

D'après le principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = \vec{F}_m$, d'où $m\frac{v_0^2}{R} = qv_0B$

$$\boxed{R = \frac{mv_0}{qB}}$$

16. D'après le théorème de l'énergie mécanique entre P_1 et P_2 , $eV_{P_1} = \frac{1}{2}mv_0^2 + eV_{P_2}$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = -eW$$

$$v_0 = \sqrt{-\frac{2eW}{m}}$$

On en déduit

$$R = \frac{mv_0}{eB} = \sqrt{-\frac{2mW}{eB^2}}$$

Or $d = 2R_2 - 2R_1$, donc

$$d = 2\sqrt{-\frac{2W}{eB^2}}(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})$$

avec $m_1 = 235m_n$ et $m_2 = 238m_n$. Ainsi,

$$W = -\frac{eB^2d^2}{8m_n(\sqrt{238} - \sqrt{235})^2}$$

$$\boxed{W = -5 \text{ kV}}$$

3.2 Le cyclotron

17. La force magnétique $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ ne travaille pas donc le mouvement dans un Dee est uniforme.

On utilise la base de Frenet, en choisissant le sens de rotation des protons comme sens positif : $\vec{v} = v\vec{t}$ et

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qvB\vec{n}$$

D'après le principe fondamental de la dynamique

$$m\vec{a} = \vec{F}_m$$

$$m\frac{v^2}{R} = qvB$$

Or $v = \frac{\pi R}{T_{1/2}}$, donc

$$\boxed{T_{1/2} = \frac{\pi m_p}{eB}}$$

18. La tension doit changer de sens à chaque passage entre les dees pour que le proton soit toujours accéléré, d'où l'utilisation d'une tension alternative. Il faut pour cela $T = 2T_{1/2}$, donc

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{eB}{2\pi m_p}}$$

A.N. : $f = 15 \text{ MHz}$

19. On a montré $R = \frac{mv}{qB}$ (cf 11.), donc

$$v_s = \frac{eBR_s}{m_p}$$

$$E_{cs} = \frac{1}{2} m_p v_s^2 = \frac{(eBR_s)^2}{2m_p}$$

$$E_{cs} = 12 \text{ MeV}$$

20. A chaque demi-tour, d'après le théorème de l'énergie mécanique, on a : $\Delta E_c = eU_m$

$$\text{On en déduit } N = \frac{E_{cs}}{2eU_m} = 60$$

21. (a) $a = \frac{v^2}{R}$ donc

$$P_r = \frac{\mu_0 q^2 v^4}{6\pi c R^2}$$

On identifie

$$\alpha = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c R^2}$$

(b)

$$E_r = P_r T_{1/2} = \alpha \left(\frac{eBR_s}{m_p} \right)^4 \frac{\pi m_p}{eB}$$

$E_r = 2,5 \times 10^{-11} \text{ eV}$ Cette énergie est négligeable devant E_{cs} , donc ce rayonnement ne ralentit pratiquement pas la particule.

4 Lancement d'un satellite géostationnaire

$$22. \vec{F} = -\mathcal{G} \frac{mM_\oplus}{r^2} \vec{u}_r$$

\vec{F} est une force conservative ssi il existe une fonction E_p telle que $dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{OM}$.

En coordonnées sphériques, on a $d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + \dots\vec{u}_\theta + \dots\vec{u}_\phi$, donc

$$dE_p = \mathcal{G} \frac{mM_\oplus}{r^2} dr$$

c'est-à-dire

$$\frac{dE_p}{dr} = \mathcal{G} \frac{mM_\oplus}{r^2}$$

soit

$$E_p(r) = -\mathcal{G} \frac{mM_\oplus}{r} + \text{constante}$$

Ainsi \vec{F} est bien conservative. La constante est arbitraire et peut être choisie nulle, de sorte que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} E_p = 0$$

23. On applique le théorème du moment cinétique par rapport au centre de la Terre O ,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

Donc \vec{L}_O se conserve. Or $\vec{OM} \perp \vec{L}_O$, donc le point M reste dans le plan passant par O et orthogonal à \vec{L}_O .

24. L'orbite géostationnaire se trouve dans le plan équatorial de la Terre.

25. Mouvement circulaire : $\vec{OM} = R\vec{u}_r$, $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{u}_r$

On applique le principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = -\mathcal{G} \frac{mM_\oplus}{R^2} \vec{u}_r$

selon \vec{u}_θ : $mR\ddot{\theta} = 0$, d'où $\dot{\theta}$ constant, donc le mouvement est uniforme

selon \vec{u}_r : $-mR\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G} \frac{mM_\oplus}{R^2}$, d'où $v = R|\dot{\theta}| = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_\oplus}{R}}$

26. $|\dot{\theta}| = \frac{2\pi}{T}$ donc $\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_{\oplus}}}$

27. La période de l'orbite stationnaire est d'environ $1 \text{ j} = 24 \times 60 \times 60 \text{ s}$, d'où $\boxed{R = 4,2 \times 10^7 \text{ m}}$

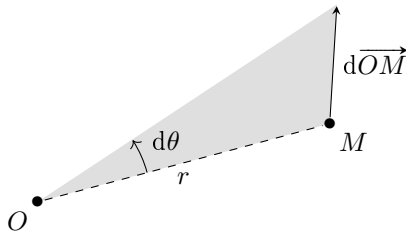
28. $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\frac{mM_{\oplus}}{R}$ avec $v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_{\oplus}}{R}}$, donc $\boxed{E_m = -\mathcal{G}\frac{mM_{\oplus}}{2R}}$

29. $\vec{OM} = r\vec{u}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_{\theta}$
 $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$
 \vec{L}_O se conserve, donc $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement. C'est la constante des aires.

30. Loi des aires : le segment qui relie le centre du Soleil (ici de la Terre) au centre d'une planète (ici d'un satellite) balaie des aires égales pendant des durées égales.

En effet l'aire de la surface balayée pendant une durée infinitésimale dt vaut

$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}r^2 \dot{\theta} dt = \frac{C}{2} dt$$



Ainsi, la vitesse aréolaire $\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}$ est constante.

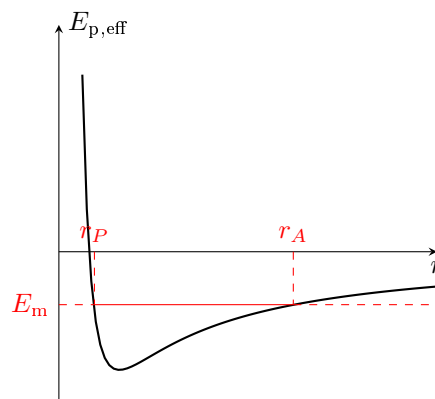
31. $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_{\theta}$ donc $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$
 Or $C = r^2\dot{\theta}$ donc $v^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}$

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\frac{mM_{\oplus}}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{G}\frac{mM_{\oplus}}{r}$$

D'où

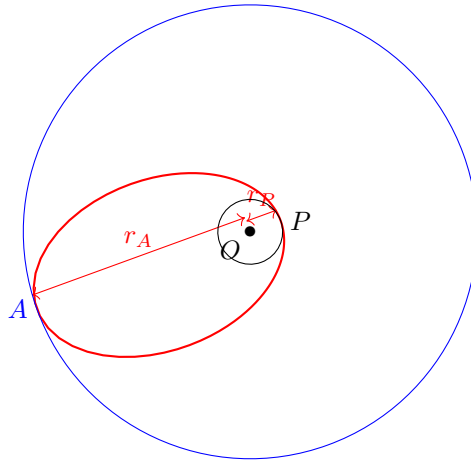
$$\boxed{E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{G}\frac{mM_{\oplus}}{r}}$$

32.



33. $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$ donc les valeurs de r possibles sont telles que $E_m \geq E_{p,\text{eff}}$. Ainsi, les états liés sont les états de $E_m < 0$.

34. $\boxed{a = \frac{r_P + r_A}{2}}$



35.

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{G}\frac{mM_\oplus}{r}$$

A l'apogée et au périgée, $\dot{r} = 0$, donc r_P et r_A sont solutions de l'équation

$$E_m = \frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{G}\frac{mM_\oplus}{r}$$

soit

$$E_m r^2 + \mathcal{G}mM_\oplus r - \frac{mC^2}{2} = 0$$

Donc $r_P + r_A = 2a = -\frac{\mathcal{G}mM_\oplus}{E_m}$, d'où

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}mM_\oplus}{2a}$$

36. La durée passée sur l'orbite de transfert est la demi-période de l'orbite.

La 3ème loi de Kepler s'écrit : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_\oplus}$, donc $\frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{G}M_\oplus}}$,

où $a = \frac{1}{2}(6,4 \times 10^6 + 2 \times 10^5 + 4,2 \times 10^7)$ m, soit $T = 1,88 \times 10^4$ s = 5,2 h

37. La vitesse initiale est la vitesse à l'équateur $v_i = \frac{2\pi R_\oplus}{T}$, avec $T = 1$ j = $24 \times 60 \times 60$ s, soit $v_i = 465$ m/s
La vitesse finale est la vitesse v_P au périgée sur l'orbite de transfert.

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}mM_\oplus}{2a} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{\mathcal{G}mM_\oplus}{r_P}$$

donc

$$v_P = \sqrt{2\mathcal{G}M_\oplus \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_P + r_A} \right)} = 10237 \text{ m/s}$$

On en déduit $\Delta v = v_P - v_i = 9,8$ km/s

38. La vitesse initiale est la vitesse v_A à l'apogée sur l'orbite de transfert.

D'après la conservation du moment cinétique $r_A v_A = r_P v_P$ d'où $v_A = 1609$ m/s

La vitesse finale est la vitesse sur l'orbite géostationnaire $v_f = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_\oplus}{R}} = 3087$ m/s

On en déduit $\Delta v = 1,5$ km/s

39. Le Δv pour rejoindre l'orbite de transfert est très grand devant le Δv pour passer sur l'orbite géostationnaire. C'est pourquoi il faut utiliser un lanceur très puissant pour la 1ère manœuvre, la seconde pouvant être réalisée par un moteur intégré au satellite. La quantité d'ergol nécessaire à une manœuvre étant proportionnelle à la masse du véhicule spatial, le satellite se désolidarise du lanceur une fois sur l'orbite de transfert. Les débris du lanceur reste sur cette orbite.

Commentaires du DS n° 6 de Physique-Chimie

A moins que la question ne soit « Donner... », justifiez toujours un minimum vos réponses. Dans les barèmes de concours, il n'y a généralement pas de points attribués aux réponses sans justification.

Ne négligez pas les applications numériques, qui sont souvent bien payées. Beaucoup de vos applications numériques sont fausses, alors que la formule littérale est correcte. Taper rapidement et correctement à la calculatrice ne s'improvise pas : il faut s'entraîner !

3. $[MalH_2] \neq [MalH^-]$ à l'équivalence ! La réaction de titrage étant (quasi-)totale, à l'équivalence, on a $[MalH_2] \ll [MalH^-]$.
8. La première chose à faire pour exploiter un titrage est d'écrire les réactions de titrages.
9. Pour déterminer l'ordre des réactions et celles qui sont simultanées, on peut soit :
 - comparer les constantes d'équilibre
 - comparer les pK_a
 - reporter les pH aux équivalences sur les diagrammes de prédominance pour voir les espèces qui ont effectivement réagi à chaque équivalence. Ici, le pH à la première équivalence (pH = 5,5) se situe dans les domaines de $MalH^-$ et Fum^{2-} . Par conséquent, à la 1ère équivalence, on a titré la première acidité de $MalH_2$ et les 2 acidités de $FumH_2$. Entre les deux équivalences, on ne titre donc que la 2ème acidité de $MalH_2$.
13. Lorsque le calcul donne une pression partielle en eau $p_v > p_{sat}$, il ne faut pas conclure $HR > 100\%$. Dans ce cas l'hypothèse « toute l'eau est sous forme vapeur » est invalidée, donc il y a de l'eau liquide à l'état final et $HR = 100\%$.
15. Dans le cas du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique, on ne peut pas utiliser la conservation du moment cinétique \vec{L}_O pour montrer que le mouvement est plan. En effet, à ce stade le centre O de la trajectoire est inconnu, on n'a même pas encore prouvé que la trajectoire est circulaire ! On ne peut donc pas montrer que \vec{OM} et \vec{F}_m sont colinéaires.

Pour les mêmes raisons, on ne peut pas non plus utiliser les coordonnées polaires et la base associée, il faut travailler dans la base de Frenet.

Pour prouver que la trajectoire est circulaire, il faut montrer que le rayon de courbure est constant. Ne pas confondre circulaire et uniforme.

16. Lorsqu'on applique le théorème de l'énergie mécanique à une particule accélérée par une tension, on peut directement écrire $\Delta E_c = |q|U$ lorsque $U > 0$ et que le sens de U n'est pas précisé. Ici, c'est l'inverse : la tension W est orientée mais son signe n'est pas précisé. Il se trouve justement que la tension W définie par l'énoncé est négative.
21. Ne pas confondre énergie (en J) et puissance (en $W=J/s$).
23. Montrer que le mouvement est plan en utilisant que les coordonnées polaires **PLANES**, ne prouve rien...
26. Il faut apprendre une formulation correcte de la loi des aires. En particulier, ne n'est pas le satellite qui balaie des aires égales, mais le segment Terre-satellite.

De plus, la loi des aires ne s'applique pas que dans le cas elliptique. La seule hypothèse de cette loi est que la force soit centrale.

27. A moins que l'énoncé ne demande explicitement de calculer la durée d'un jour sidéral, on peut prendre $T \simeq 24$ h comme période de l'orbite géostationnaire.
33. Il faut justifier que le mouvement est lié pour $E_m < 0$:
 $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$, donc les valeurs accessibles de r sont telles que $E_m \geq E_{p,eff}(r)$.