

## DS n° 7 de Physique-Chimie

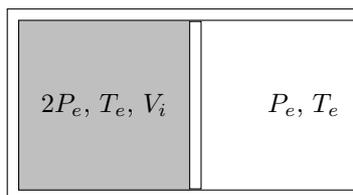
Durée : 4h  
Calculatrice autorisée

### 1 Différentes détente d'un gaz parfait

On considère un gaz parfait d'indice adiabatique  $\gamma$ .

- Établir les expressions de la capacité thermique molaire à volume constant  $C_{V,m}$ , et de la capacité thermique molaire à pression constante  $C_{P,m}$ , en fonction de  $R$  et  $\gamma$ .

Un gaz parfait est enfermé dans une enceinte cylindrique, fermée par un piston, pouvant coulisser sans frottements. On note  $T_e$  et  $P_e$ , la température et la pression du milieu extérieur. A l'état initial, le volume du gaz est  $V_i$ , la pression dans l'enceinte vaut  $2P_e$  et la température dans l'enceinte vaut  $T_e$ .



- Les parois de l'enceinte sont supposées diathermes, c'est-à-dire qu'elles permettent le transfert thermique. Déterminer la pression finale  $P_f$ , la température finale  $T_f$ , le volume final  $V_f$  et le transfert thermique  $Q$  reçu par le gaz, en fonction de  $P_e$ ,  $V_i$  et  $T_e$ .
- Les parois de l'enceinte sont supposées athermanes, c'est-à-dire qu'elles ne permettent pas le transfert thermique. Déterminer la pression finale  $P_f$ , la température finale  $T_f$  et le volume final  $V_f$ , en fonction de  $P_e$ ,  $V_i$ ,  $T_e$  et  $\gamma$ .

On considère le même état initial : le volume du gaz est  $V_i$ , la pression dans l'enceinte vaut  $2P_e$  et la température dans l'enceinte vaut  $T_e$ . Mais on suppose maintenant qu'un opérateur retient le piston, de sorte que la pression dans l'enceinte passe doucement de  $2P_e$  à  $P_e$ . Les parois de l'enceinte sont supposées diathermes et la transformation isotherme.

- Déterminer la pression finale  $P_f$ , la température finale  $T_f$ , le volume final  $V_f$ , le travail  $W$  et le transfert thermique  $Q$  recus par le gaz, en fonction de  $P_e$ ,  $V_i$  et  $T_e$ .

### 2 Bouilloire électrique

Données :

- Enthalpie de vaporisation de l'eau à  $100^\circ\text{C}$  :  $\Delta_{\text{vap}}h = 2,6 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$
- Capacité thermique massique de l'eau liquide :  $c = 4,2 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$

On suppose que les transformations sont suffisamment rapides pour qu'on puisse négliger le transfert thermique avec l'air extérieur. La bouilloire contient initialement de l'eau à la température ambiante  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . La capacité thermique de la bouilloire et de l'eau qu'elle contient est égale à la capacité de  $m = 1,0 \text{ kg}$  d'eau. La bouilloire est posée sur une balance, qui affiche initialement  $1432 \text{ g}$ . A l'instant  $t = 0$ , on allume la bouilloire, qui consomme une puissance électrique  $\mathcal{P}_e = 2,0 \text{ kW}$ . La bouilloire est laissée ouverte de sorte que le mécanisme d'extinction automatique de la bouilloire ne se déclenche pas, laissant ainsi l'eau se vaporiser.

- Déterminer la valeur affichée par la balance au bout de 7 minutes.

### 3 Autour du manganèse

Données :

- Hydroxyde de manganèse(II)  $\text{Mn}(\text{OH})_{2(s)}$  :  $\text{p}K_{s2} = 12,6$
- Hydroxyde de manganèse(III)  $\text{Mn}(\text{OH})_{3(s)}$  :  $\text{p}K_{s3} = 35,6$
- L'acide sulfurique  $\text{H}_2\text{SO}_4$  est un acide fort
- Couple  $\text{HSO}_4^- / \text{SO}_4^{2-}$  :  $\text{p}K_a = 1,9$

### 3.1 L'ion permanganate

Le manganèse (Mn) appartient à la quatrième période et possède 7 électrons de valence. La formule de l'ion permanganate est  $\text{MnO}_4^-$ .

6. Proposer un schéma de Lewis de l'ion permanganate.
7. En déduire sa géométrie.
8. Déterminer le nombre d'oxydation de Mn dans l'ion permanganate.
9. Écrire la demi-équation électronique d'oxydation en milieu basique, du couple  $\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}$ .

### 3.2 Précipitation sélective

On considère une solution contenant les ions  $\text{Mn}^{2+}$  et  $\text{Mn}^{3+}$  chacun à la même concentration  $c = 1,0 \times 10^{-2}$  mol.L<sup>-1</sup>.

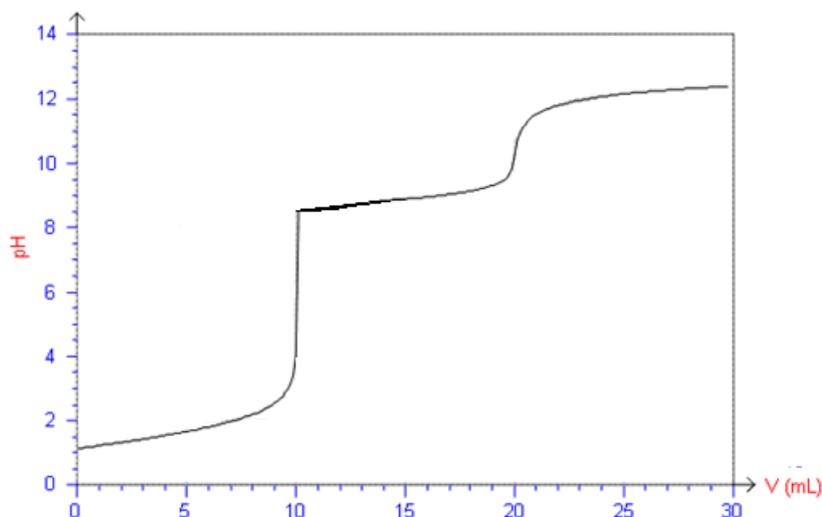
10. Établir les diagrammes d'existence de  $\text{Mn}(\text{OH})_{2(s)}$  et  $\text{Mn}(\text{OH})_{3(s)}$  en fonction du pH, pour une concentration de tracé  $c$ .
11. La solution est initialement non saturée. Que se passe-t-il lors de l'addition progressive de soude concentrée?
12. Dans quel domaine de pH doit-on se placer pour précipiter au moins 99% des ions  $\text{Mn}^{3+}$  sans précipiter les ions  $\text{Mn}^{2+}$ ?
13. Calculer la concentration en ions  $\text{Mn}^{3+}$  quand le second solide apparaît. Commenter.

### 3.3 Solubilité de l'hydroxyde de manganèse(II)

14. Calculer la solubilité  $s_0$  de l'hydroxyde de manganèse(II) dans l'eau pure.
15. Calculer le pH d'une solution d'hydroxyde de manganèse(II) saturée.
16. On note  $s$  la solubilité de l'hydroxyde de manganèse(II) dans une solution dont le pH est fixé par ailleurs (présence d'autres espèces acido-basiques). Établir l'expression de  $\log(s)$  en fonction du pH.

### 3.4 Dosage d'une solution acidifiée de sulfate de manganèse

On souhaite doser une solution contenant du sulfate de manganèse(II) ( $\text{Mn}^{2+} + \text{SO}_4^{2-}$ ) à la concentration  $c_1$  et de l'acide sulfurique  $\text{H}_2\text{SO}_4$  à la concentration  $c_2$ . Pour cela, on introduit dans un bécher  $V_0 = 10,0$  mL de cette solution, on ajoute  $V_{\text{eau}} = 5$  mL d'eau et on verse progressivement une solution de soude ( $\text{Na}^+ + \text{HO}^-$ ) de concentration  $c_b = 0,10$  mol.L<sup>-1</sup>. On réalise un suivi pH-métrique de ce dosage. La courbe obtenue est donnée ci-dessous, où  $V$  est le volume de solution titrante versé.

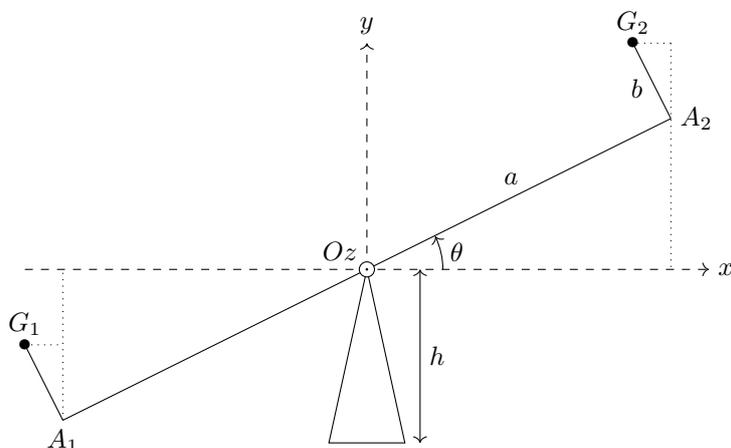


17. Pourquoi ajouter de l'eau initialement?
18. Écrire les réactions de titrages pour un même nombre de  $\text{HO}^-$  et calculer leurs constantes d'équilibre.
19. Déterminer  $c_1$  et  $c_2$ .
20. En exploitant la courbe, retrouver la valeur du  $\text{p}K_s$  de l'hydroxyde de manganèse(II).

## 4 Balançoire à bascule



On modélise une balançoire à bascule, par une barre  $A_1A_2$ , de longueur  $2a$  de milieu  $O$ , en liaison pivot d'axe  $Oz$  avec un bâti solide du sol. L'axe de rotation  $Oz$  se situe à une hauteur  $h$  du sol. Deux enfants, 1 et 2, de masses  $m_1$  et  $m_2$ , sont assis à chaque extrémité de la barre. Les centres de masses  $G_1$  et  $G_2$  des deux enfants sont situés à une même distance  $b$  au-dessus de la barre. On suppose que la barre et les deux enfants constituent un solide indéformable, de moment d'inertie  $J$  par rapport à  $Oz$ . On note  $\theta$  l'angle de la barre avec l'horizontale.



Les enfants gardent leurs jambes pliées de part et d'autre de la barre, de sorte que les extrémités  $A_1$  et  $A_2$  de la barre peuvent toucher le sol. On note  $\theta_m$ , respectivement  $-\theta_m$ , les angles de la barre avec l'horizontale lorsque  $A_1$ , respectivement  $A_2$ , touchent le sol.

21. Exprimer  $\theta_m$  en fonction de  $a$  et  $h$ .
22. Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur le système (barre  $\cup$  enfant 1  $\cup$  enfant 2), lorsque la balançoire ne touche pas le sol.
23. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = (m_1 - m_2)ga \cos(\theta) + (m_1 + m_2)gb \sin(\theta)$$

24. Établir une intégrale première du mouvement. En déduire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp}(\theta)$ .
25. Dans le cas où les deux enfants ont la même masse, représenter l'allure du graphe  $E_{pp}(\theta)$ . Placer  $\theta_m$  et  $-\theta_m$  sur le graphe.
26. Établir l'expression de la position d'équilibre  $\theta_{eq}$  la plus proche de  $\theta = 0$ , en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $m_1$  et  $m_2$ . Préciser, sans calcul, s'il s'agit d'une position d'équilibre stable ou instable.
27. Dans le cas où  $m_2 > m_1$ , représenter l'allure du graphe  $E_{pp}(\theta)$ . Placer  $\theta_{eq}$  sur le graphe. En déduire une condition sur  $\theta_{eq}$  et  $\theta_m$  pour que les deux enfants puissent faire de la balançoire, c'est-à-dire pour que la balançoire ne bascule pas systématiquement du côté de l'enfant le plus lourd.

Dans toute la suite, on se place dans le cas où les deux enfants ont la même masse  $m = m_1 = m_2$ .

A l'instant  $t = 0$ , la balançoire est dans la position  $\theta(0) = -\theta_m$  ( $A_2$  au sol). En poussant sur ses jambes, l'enfant 2 communique une vitesse de rotation initiale  $\frac{d\theta}{dt}(0) = \Omega_0$  à la balançoire.

On pose  $\lambda = \sqrt{\frac{2mgb}{J}}$ .

28. Déterminer la dimension de  $\lambda$ .
29. A quelle condition sur  $h$  et  $a$  la balançoire reste-t-elle peu inclinée par rapport au sol? Établir la loi  $\theta(t)$  dans cette approximation, en fonction de  $t$ ,  $\lambda$ ,  $\theta_m$  et  $\Omega_0$ . On pourra utiliser les fonctions ch et sh. L'approximation d'une balançoire peu inclinée n'est plus considérée dans les questions suivantes.
30. Par un raisonnement énergétique, établir une condition sur  $\Omega_0$ ,  $\lambda$  et  $\theta_m$  pour que la balançoire bascule du coté de l'enfant 1 ( $A_1$  au sol).
31. Dans le cas où la condition précédente est vérifiée, montrer que le temps  $\tau$  pour que  $A_1$  atteigne le sol se met sous la forme :

$$\tau = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\Omega_0^2 + 2\lambda^2 [\cos(\theta_m) - \cos(\theta)]}}$$

On adimensionne le problème en posant  $\tilde{t} = \lambda t$ ,  $\tilde{\Omega} = \frac{d\theta}{d\tilde{t}}$  et  $\tilde{\Omega}_0 = \frac{\Omega_0}{\lambda}$ .

L'équation du mouvement se réécrit alors :

$$\frac{d^2\theta}{d\tilde{t}^2} = \sin(\theta)$$

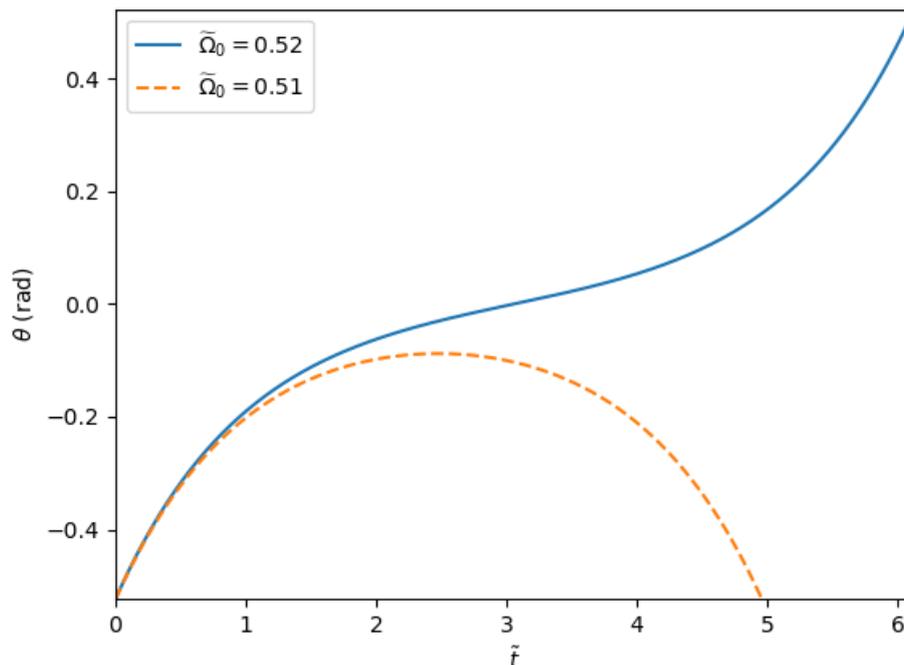
et le temps de bascule adimensionné s'écrit :

$$\tilde{\tau} = \lambda\tau = 2 \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\tilde{\Omega}_0^2 + 2[\cos(\theta_m) - \cos(\theta)]}}$$

On souhaite calculer  $\tilde{\tau}$  et résoudre l'équation du mouvement, à l'aide d'un programme python. Pour cela, on importe les modules math et matplotlib.pyplot et on affecte des valeurs aux paramètres  $\theta_m$  et  $\tilde{\Omega}_0$ , de la manière suivante.

```
from math import *
import matplotlib.pyplot as plt
theta_m=pi/6
Omega_0=0.52
```

32. Écrire un programme python pour calculer  $\tilde{\tau}$  par la méthode des rectangles, avec  $N = 1000$  rectangles. On stockera le résultat dans une variable **tau**.
33. Réécrire l'équation différentielle adimensionnée comme un système différentiel du premier ordre sur les variables  $(\theta, \tilde{\Omega})$ .
34. On pose  $\{\tilde{t}_i\}_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ , où  $N = 1000$ , une subdivision régulière de l'intervalle  $[0, \tilde{\tau}]$ . On note  $p = \tilde{\tau}/N$  le pas de temps, et  $\theta_i$  et  $\tilde{\Omega}_i$  les valeurs approchées de  $\theta(\tilde{t}_i)$  et  $\tilde{\Omega}(\tilde{t}_i)$  par la méthode d'Euler. Établir les expressions de  $\theta_{i+1}$  et  $\tilde{\Omega}_{i+1}$  en fonction de  $p$ ,  $\theta_i$  et  $\tilde{\Omega}_i$ .
35. Écrire un programme python pour résoudre l'équation différentielle adimensionnée, sur l'intervalle  $[0, \tilde{\tau}]$ , avec les conditions initiales  $\theta(0) = -\theta_m$  et  $\frac{d\theta}{d\tilde{t}}(0) = \tilde{\Omega}_0$ , par la méthode d'Euler, puis tracer le graphe  $\theta(\tilde{t})$ .
36. Interpréter les résultats ci-dessous.



## Correction du DS n° 7

### 1 Différentes détente d'un gaz parfait

1.  $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_{Pm}}{C_{Vm}}$

$H = U + PV = U + nRT$  donc  $C_{Pm} = C_{Vm} + R$

Ainsi,  $C_{Vm} = \frac{R}{\gamma-1}$  et  $C_{Pm} = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$

2. Système : gaz ( $\cup$  enceinte  $\cup$  piston)

Le système atteint l'équilibre mécanique  $P_f = P_e$  et l'équilibre thermique  $T_f = T_e$ .

D'après l'équation d'état du gaz parfait :  $2P_e V_i = nRT_e$  et  $P_e V_f = nRT_e$ , donc  $V_f = 2V_i$ .

La transformation est monotherme et monobare (mais il n'y a pas équilibre mécanique à l'état initial).

$W = - \int_{V_i}^{V_f} P_e dV = -P_e V_i$ .

Le premier principe s'écrit :  $\Delta U = W + Q$

Or  $\Delta U = C_V(T_f - T_i) = 0$ , donc  $Q = P_e V_i$

3. Le système atteint l'équilibre mécanique  $P_f = P_e$

D'après l'équation d'état du gaz parfait :  $2P_e V_i = nRT_e$  et  $P_e V_f = nRT_f$ , donc  $\frac{V_f}{2V_i} = \frac{T_f}{T_e}$ .

La transformation est adiabatique et monobare (mais il n'y a pas équilibre mécanique à l'état initial).

$W = - \int_{V_i}^{V_f} P_e dV = P_e(V_i - V_f)$ .

Le premier principe s'écrit :  $\Delta U = W + Q$  où  $Q = 0$  (adiabatique).  $\Delta U = C_V(T_f - T_e) = \frac{nR}{\gamma-1}(T_f - T_e) = \frac{2P_e V_i}{\gamma-1}(\frac{T_f}{T_e} - 1)$ ,

donc  $\frac{2P_e V_i}{\gamma-1}(\frac{T_f}{T_e} - 1) = P_e(V_i - V_f)$ , soit  $2(\frac{T_f}{T_e} - 1) = (\gamma - 1)(1 - \frac{V_f}{V_i})$ .

Or  $\frac{V_f}{2V_i} = \frac{T_f}{T_e}$ , on en déduit  $T_f = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\gamma})T_e$  et  $V_f = (1 + \frac{1}{\gamma})V_i$ .

$\gamma > 1$ , donc  $T_f < T_e$  et  $V_f < 2V_i$

4. La transformation est isotherme :  $T = T_e$  et le système reste quasi-constamment à l'équilibre mécanique :

$P_{\text{ext}} = P = \frac{nRT_e}{V}$ .

Donc  $T_f = T_e$  et  $P_f = P_e$ .

D'après l'équation d'état du gaz parfait :  $2P_e V_i = nRT_e$  et  $P_e V_f = nRT_e$ , donc  $V_f = 2V_i$ .

$W = - \int P_{\text{ext}} dV = - \int_{V_i}^{2V_i} \frac{nRT_e}{V} dV = -nRT_e \ln(2) = -2P_e V_i \ln(2)$

Le premier principe s'écrit :  $\Delta U = W + Q$ , où  $\Delta U = 0$  (isotherme), donc  $Q = 2P_e V_i \ln(2)$ .

### 2 Bouilloire électrique

5. Système : eau  $\cup$  bouilloire

La transformation est monobare avec équilibre mécanique à l'état initial et final, et adiabatique.

Le premier principe s'écrit :  $\Delta H = W_{\text{autre}} + Q$  où  $Q = 0$  et  $W_{\text{autre}} = P_e \Delta t$

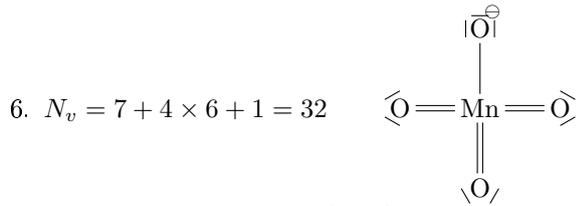
On suppose qu'à l'état final  $T_f = 100^\circ\text{C}$  et une masse  $m_v$  d'eau s'est vaporisée.

$\Delta H = mc(T_f - T_0) + m_v \Delta_{\text{vap}} h = P_e \Delta t$

d'où  $m_v = \frac{P_e \Delta t - mc(T_f - T_0)}{\Delta_{\text{vap}} h} = 194 \text{ g} < m$  donc l'hypothèse est validée.

La balance affiche  $1238 \text{ g}$

### 3 Autour du manganèse



7. Géométrie tétraédrique (AX<sub>4</sub>)

8.  $\text{no}(\text{Mn}) + 4\text{no}(\text{O}) = -\text{I}$ , avec  $\text{no}(\text{O}) = -\text{II}$ , donc  $\boxed{\text{no}(\text{Mn}) = +\text{VII}}$

9.  $\text{Mn}^{2+} + 4\text{H}_2\text{O} = \text{MnO}_4^- + 8\text{H}^+ + 5\text{e}^-$   
 En milieu basique :  $\text{Mn}^{2+} + 8\text{HO}^- = \text{MnO}_4^- + 4\text{H}_2\text{O} + 5\text{e}^-$

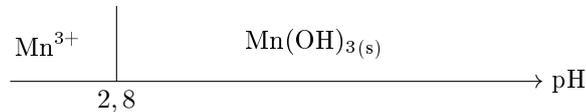
10.

$$\begin{aligned} \text{Mn(OH)}_{2(s)} \text{ existe} &\Leftrightarrow [\text{Mn}^{2+}] [\text{HO}^-]^2 = K_{s2} \text{ et } [\text{Mn}^{2+}] < c \\ &\Leftrightarrow \frac{K_{s2}}{[\text{HO}^-]^2} < c \\ &\Leftrightarrow \frac{K_{s2}h^2}{K_e^2} < c \\ &\Leftrightarrow \text{pH} > \text{p}K_e + \frac{1}{2}(\text{pc} - \text{p}K_{s2}) = 8,7 \end{aligned}$$



De même,

$$\text{Mn(OH)}_{3(s)} \text{ existe} \Leftrightarrow \text{pH} > \text{p}K_e + \frac{1}{3}(\text{pc} - \text{p}K_{s3}) = 2,8$$



11. Lors de l'addition de soude le pH augmente, on observe d'abord la formation de  $\text{Mn(OH)}_{3(s)}$ , puis de  $\text{Mn(OH)}_{2(s)}$ .

12.

$$\begin{aligned} \text{Plus de 99\% de Mn}^{3+} \text{ précipite} &\Leftrightarrow [\text{Mn}^{3+}] [\text{HO}^-]^3 = K_{s3} \text{ et } [\text{Mn}^{3+}] < 0,01c \\ &\Leftrightarrow \frac{K_{s3}}{[\text{HO}^-]^3} < 0,01c \\ &\Leftrightarrow \frac{K_{s3}h^3}{K_e^3} < 0,01c \\ &\Leftrightarrow \text{pH} > \text{p}K_e + \frac{1}{3}(\text{pc} + 2 - \text{p}K_{s3}) = 3,47 \end{aligned}$$

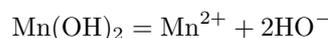
Il faut se placer dans le domaine  $\boxed{\text{pH} \in [3,47; 8,7]}$

13.  $\text{Mn(OH)}_{2(s)}$  apparaît lorsque  $[\text{Mn}^{2+}] [\text{HO}^-]^2 = K_{s2}$  avec  $[\text{Mn}^{2+}] = c$ , donc  $[\text{HO}^-] = \sqrt{\frac{K_{s2}}{c}}$ .

$\text{Mn(OH)}_{3(s)}$  existe, donc  $[\text{Mn}^{3+}] [\text{HO}^-]^3 = K_{s3}$ , d'où  $\boxed{[\text{Mn}^{3+}] = K_{s3} \left(\frac{c}{K_{s2}}\right)^{3/2} = 10^{-19,7} \text{ mol.L}^{-1}}$

$[\text{Mn}^{3+}]$  est négligeable devant  $c$  : tout le manganèse(III) a précipité.

14. On considère une solution saturée de  $\text{Mn(OH)}_{2(s)}$ .



$$[\text{Mn}^{2+}] [\text{HO}^-]^2 = K_{s2} \text{ avec } [\text{Mn}^{2+}] = s_0 \text{ et } [\text{HO}^-] = 2s_0, \text{ donc } \boxed{s_0 = \left(\frac{K_{s2}}{4}\right)^{1/3} = 3,97 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}}$$

15.  $[\text{HO}^-] = 2s_0$ , donc  $h = \frac{K_e}{2s_0}$ , donc  $\boxed{\text{pH} = 9,9}$

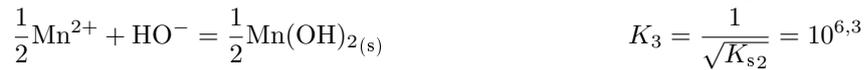
16. On considère une solution saturée en  $\text{Mn}(\text{OH})_{2(s)}$ .

$[\text{Mn}^{2+}] = s$ ;  $[\text{HO}^-]$  est maintenant un paramètre libre :  $[\text{HO}^-] = \frac{K_e}{h}$ .

$[\text{Mn}^{2+}] [\text{HO}^-]^2 = K_{s2}$  donc  $s = \frac{h^2 K_{s2}}{K_e^2}$ , d'où  $\boxed{\log s = 2\text{p}K_e - \text{p}K_{s2} - 2\text{pH} = 15,4 - 2\text{pH}}$

17. On ajoute de l'eau pour immerger la sonde pH-métrique (électrode combinée).

18.  $\text{H}_2\text{SO}_4$  est un acide fort donc totalement dissocié en  $\text{H}_3\text{O}^+ + \text{HSO}_4^-$ . Les réactions sont :



Les réactions (1) et (2) sont simultanées et ont lieu jusqu'à la première équivalence. La réaction 3 a lieu entre les deux équivalences.

19. A la 1ère équivalence :  $2n_{\text{H}_2\text{SO}_4, i} = n_{\text{HO}^-, v}$ , donc  $2c_2V_0 = c_bV_{\text{éq1}}$  avec  $V_{\text{éq1}} = 10 \text{ mL}$ ,

d'où  $\boxed{c_2 = 0,050 \text{ mol.L}^{-1}}$

A la seconde équivalence :  $n_{\text{Mn}^{2+}, i} = n_{\text{HO}^-}$ , verse entre les 2 equiv/2, donc  $c_1V_0 = c_b(V_{\text{éq2}} - V_{\text{éq1}})/2$  avec

$V_{\text{éq2}} = 20 \text{ mL}$ , d'où  $\boxed{c_1 = 0,05 \text{ mol.L}^{-1}}$

20. A la première équivalence,  $\text{Mn}(\text{OH})_2$  apparaît, donc  $[\text{Mn}^{2+}] [\text{HO}^-]^2 = K_{s2}$

$[\text{Mn}^{2+}] \simeq \frac{c_1V_0}{V_0 + V_{\text{eau}} + V_{\text{éq1}}}$  et on lit sur la courbe  $\text{pH} = 8,4$

$K_{s2} = \frac{c_1V_0}{V_0 + V_{\text{eau}} + V_{\text{éq1}}} \left(\frac{K_e}{h}\right)^2$  d'où  $\text{p}K_{s2} = 2\text{p}K_e - 2\text{pH} - \log\left(\frac{c_1V_0}{V_0 + V_{\text{eau}} + V_{\text{éq1}}}\right) = 12,6$

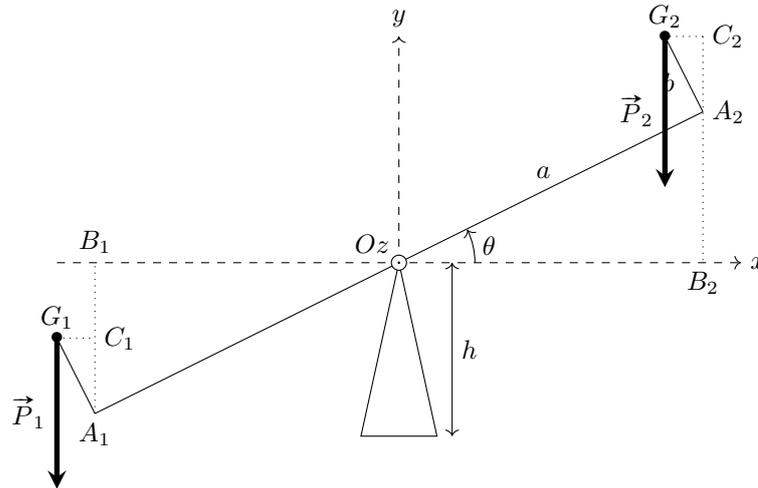
## 4 Balancoire à bascule

21.  $\sin \theta_m = \frac{h}{a}$ , donc  $\theta_m = \arcsin \frac{h}{a}$

22. Le système (barre  $\cup$  enfant 1  $\cup$  enfant 2) est soumis à :

- le poids  $\vec{P}$  de la barre, qui s'applique en  $O$
- le poids  $\vec{P}_1$  de l'enfant 1, qui s'applique en  $G_1$
- le poids  $\vec{P}_2$  de l'enfant 2, qui s'applique en  $G_2$
- la réaction du bâti  $\vec{R}$  qui s'applique en  $O$

23.



Le bras de levier de  $\vec{P}_1$  est  $G_1C_1 + B_1O = b \sin(\theta) + a \cos(\theta)$ , donc  $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}_1) = m_1g[b \sin(\theta) + a \cos(\theta)]$   
 Le bras de levier de  $\vec{P}_2$  est  $OB_2 - G_2C_2 = a \cos(\theta) - b \sin(\theta)$ , donc  $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}_2) = -m_2g[a \cos(\theta) - b \sin(\theta)]$   
 $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = 0$  et  $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{R}) = 0$

Le théorème du moment cinétique s'écrit :  $\frac{dL_{Oz}}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}_1) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}_2) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{R})$   
 où  $L_{Oz} = J\dot{\theta}$ . Ainsi,

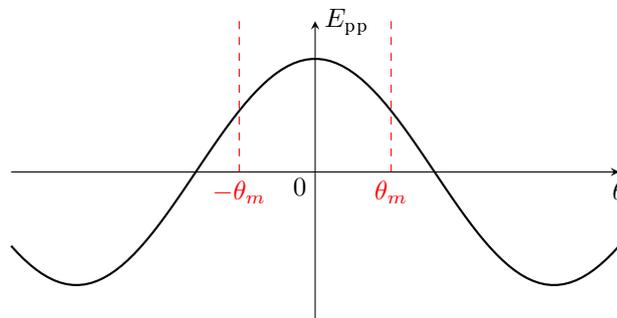
$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = (m_1 - m_2)ga \cos(\theta) + (m_1 + m_2)gb \sin(\theta)$$

24.  $J\ddot{\theta} - (m_1 - m_2)ga \cos(\theta)\dot{\theta} - (m_1 + m_2)gb \sin(\theta)\dot{\theta} = 0$

On prend une primitive :  $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - (m_1 - m_2)ga \sin(\theta) + (m_1 + m_2)gb \cos(\theta) = \text{cste}$

Or  $E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$  et  $E_c + E_{pp} = \text{cste}$  donc on identifie  $E_{pp} = (m_1 + m_2)gb \cos(\theta) + (m_2 - m_1)ga \sin(\theta)$

25.  $E_{pp} = 2mgb \cos(\theta)$



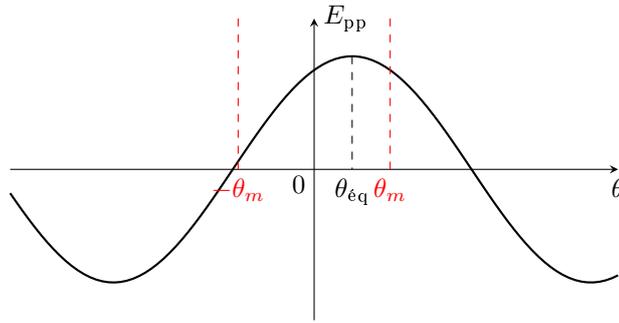
26. D'après l'équation du mouvement  $(m_1 - m_2)ga \cos(\theta_{\text{éq}}) + (m_1 + m_2)gb \sin(\theta_{\text{éq}}) = 0$ , donc  $\tan \theta_{\text{éq}} = \frac{a}{b} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$ .

Les solutions sont  $\arctan\left(\frac{a}{b} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) [\pi]$ .

La solution la plus proche de 0 est  $\theta_{\text{éq}} = \arctan\left(\frac{a}{b} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)$

C'est la position du premier maximum de  $E_{pp}$  donc il s'agit d'une position d'équilibre instable.

27.



Les positions  $\theta = \pm\theta_m$  sont stables si  $|\theta_{\text{eq}}| < \theta_m$

28.  $[J] = \text{M.L}^2$ ,  $[g] = \text{L.T}^{-2}$  donc  $[\lambda] = \left(\frac{\text{M.L.T}^{-2}.\text{L}}{\text{M.L}^2}\right)^{1/2}$ , soit  $[\lambda] = \text{T}^{-1}$

29. La balançoire reste peu inclinée si  $a \gg h$ . Dans cette approximation,  $\sin \theta \sim \theta$ , l'équation du mouvement devient :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \lambda^2\theta = 0$$

Les solutions sont les fonctions de la forme :  $\theta(t) = A\text{ch}(\lambda t) + B\text{sh}(\lambda t)$

A  $t = 0$ ,  $\theta(0) = -\theta_m = A$  et  $\dot{\theta}(0) = \Omega_0 = \lambda B$ .

Ainsi,  $\theta(t) = \frac{\Omega_0}{\lambda}\text{sh}(\lambda t) - \theta_m\text{ch}(\lambda t)$

30. Le système n'est soumis qu'aux poids et à des forces qui ne travaillent pas donc l'énergie mécanique,

$E_m = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + 2mgb \cos(\theta)$ , se conserve.

La balançoire bascule si elle atteint  $\theta = 0$ , où l'énergie potentielle est maximale,

donc si  $\frac{1}{2}J\Omega_0^2 + 2mgb \cos(-\theta_m) > 2mgb \cos(0)$

c'est-à-dire si  $\Omega_0^2 > \lambda^2[1 - \cos(\theta_m)]$

31.  $E_m = \frac{1}{2}J\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2mgb \cos(\theta) = \frac{1}{2}J\Omega_0^2 + 2mgb \cos(-\theta_m)$ , donc

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\Omega_0^2 + 2\lambda^2 [\cos(\theta_m) - \cos(\theta)]}$$

$$\tau = \int_0^\tau dt = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\Omega_0^2 + 2\lambda^2 [\cos(\theta_m) - \cos(\theta)]}}$$

32. Soit  $f = x \mapsto \frac{2}{\sqrt{\tilde{\Omega}_0^2 + 2[\cos(\theta_m) - \cos(\theta)]}}$

$$\tilde{\tau} = \int_0^{\theta_m} f(x)dx \simeq h \sum_{i=0}^{N-1} f(ih + \frac{h}{2}) \quad \text{où } h = \frac{\theta_m}{N}$$

N=1000

h=theta\_m/N

tau=0

for i in range(N):

tau=tau+2/sqrt(0\*omega\_0\*\*2+2\*(cos(theta\_m)-cos((i+0.5)\*h)))

tau=h\*tau

33.

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\tilde{t}} = \tilde{\Omega} \\ \frac{d\tilde{\Omega}}{d\tilde{t}} = \sin \theta \end{cases}$$

34.  $t_i = ip$  avec  $p = \frac{\tilde{\tau}}{N}$

$\frac{d\theta}{d\tilde{t}}(t_i) \simeq \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{p}$ , d'où  $\theta_{i+1} = \theta_i + p\tilde{\Omega}_i$

De même,  $\tilde{\Omega}_{i+1} = \tilde{\Omega}_i + p \sin(\theta_i)$

35.

```

N=1000
p=tau/N
theta=[-theta_m]
Omega=[Omega_0]
for i in range(N):
    theta.append(theta[i]+p*Omega[i])
    Omega.append(Omega[i]+p*sin(theta[i]))
t=[i*p for i in range(N+1)]
plt.plot(t,theta)

```

36. On a montré que la vitesse de rotation initiale minimale pour basculer du côté de l'enfant 1 est  $\Omega_{0\min} = \lambda\sqrt{2[1 - \cos\theta_m]}$ , c'est-à-dire  $\widetilde{\Omega}_{0\min} = \sqrt{2[1 - \cos\theta_m]}$  avec  $\theta_m = \frac{\pi}{6}$  on obtient  $\widetilde{\Omega}_{0\min} = 0,5176$ . On observe que pour  $\widetilde{\Omega}_0 = 0,51$ , la balançoire retombe du côté de l'enfant 2. Pour  $\widetilde{\Omega}_0 = 0,52$ , la balançoire bascule bien du côté de l'enfant 1.

## Commentaires du DS n° 7 de Physique-Chimie

2. La notion d'équilibre mécanique semble mal comprise : il y a équilibre mécanique lorsque les forces qui s'exercent sur les parties mobiles du système se compensent. Avec  $2P_e$  d'un côté du piston et  $P_e$  de l'autre, il n'y a certainement pas équilibre mécanique à l'état initial, ni au cours de la transformation. Il n'y a équilibre mécanique qu'à l'état final. On ne peut donc pas utiliser le premier principe avec l'enthalpie.
3. Il y a une erreur dans la correction : il manque le facteur  $\gamma - 1$   

$$\Delta U = C_V(T_f - T_e) = \frac{nR}{\gamma-1}(T_f - T_e) = \frac{2P_e V_i}{\gamma-1} \left( \frac{T_f}{T_e} - 1 \right),$$
 donc  $\frac{2P_e V_i}{\gamma-1} \left( \frac{T_f}{T_e} - 1 \right) = P_e(V_i - V_f)$ , soit  $2 \left( \frac{T_f}{T_e} - 1 \right) = (\gamma - 1) \left( 1 - \frac{V_f}{V_i} \right)$ .  
 Or  $\frac{V_f}{2V_i} = \frac{T_f}{T_e}$ , on en déduit  $T_f = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right) T_e$  et  $V_f = \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right) V_i$ .  
 $\gamma > 1$ , donc  $T_f < T_e$  et  $V_f < 2V_i$
4. Attention ici un opérateur exerce une force sur le piston. Tout se passe comme si le système n'était soumis qu'aux forces extérieures de pression, à condition d'inclure la force surfacique de l'opérateur dans la pression extérieure, c'est-à-dire  $P_{\text{ext}} = P_e + \frac{F_{\text{op}}}{S}$ . Il faut alors bien distinguer
  - le travail des forces de pression  $W_P = - \int P_e dV$
  - et le travail total  $W = W_P + W_{\text{op}} = - \int P_{\text{ext}} dV$
5. L'énoncé précise bien que la masse  $m$  correspond à la masse d'eau + la valeur en eau de la bouilloire. Le système est alors équivalent à une masse  $m$  d'eau, il ne faut pas ajouter la masse de la bouilloire.
7. Ne pas confondre les géométries
  - tétraédrique (sans «h») :  $AX_4$
  - pyramidale à base triangulaire :  $AX_3E$
 Cette dénomination est très ambiguë car mathématiquement, un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire, mais c'est le vocabulaire utilisé en chimie.
10. Il y a une erreur dans la correction : le pH limite de  $Mn(OH)_2$  est 2,8.
14. Ne pas oublier l'unité de la solubilité.
17. Ajouter 5 mL d'eau, alors qu'on va verser 20 mL de solution titrante ne permet de pas de négliger l'effet de dilution, c'est-à-dire la variation de volume! De plus, l'effet de dilution n'est pas gênant pour un titrage, à moins qu'on veuille faire un suivi conductimétrique. Et encore, dans le cas d'un suivi conductimétrique, on peut toujours tracer l'évolution de la conductivité corrigée pour s'affranchir de l'effet de dilution.  
 Les 5 mL d'eau ne servent pas non plus à faire réagir  $H_2SO_4$  : l'acide sulfurique est déjà en solution, c'est-à-dire dissous dans l'eau.
18.  $H_2SO_4$  est un acide fort, c'est-à-dire qu'il n'existe pas en solution aqueuse : il est totalement dissocié en  $H_3O^+ + HSO_4^-$ . Ainsi l'acide sulfurique est un mélange équimolaire d'acides :  $H_3O^+$  et l'acide faible  $HSO_4^-$ .
20. Encore une erreur dans la correction :  
 A la seconde équivalence :  $n_{Mn^{2+}, i} = n_{HO^-}$ , verse entre les 2 equiv/2, donc  $c_1 V_0 = c_b (V_{\text{éq}2} - V_{\text{éq}1})/2$  avec  $V_{\text{éq}2} = 20 \text{ mL}$ , d'où  $c_1 = 0,05 \text{ mol.L}^{-1}$
24. Ne pas oublier la constante d'intégration quand on prend une intégrale première du mouvement.
25. Pour tracer l'allure d'un graphe, il ne faut pas hésiter à calculer les ordonnées de quelques valeurs particulière, par exemple ici 0,  $\pm\pi/2$ , etc.