Chapitre I
Bases de l'analyse

I Analyse élémentaire

I.1 Inégalité

Théorème (Compatibilité de l'ordre avec $+$ et $\times$)

1)

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x \leqslant y \Leftrightarrow x+z \leqslant y+z \quad \textbf{(on ajoute } z \textbf{ membre à membre)}$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall z \in \mathbb{R}_+, \quad x \leqslant y \Rightarrow xz \leqslant yz \quad \textbf{(on multiplie par } z \textbf{ membre à membre attention au signe de } z\textbf{)}$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall z \in \boxed{\mathbb{R}_+^*}, \quad x \leqslant y \boxed{\Leftrightarrow} xz \leqslant yz \quad \textbf{(avec équivalence si } z > 0\textbf{)}$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall z \in \mathbb{R}_-, \quad x \leqslant y \Rightarrow xz \geqslant yz \quad \textbf{(on multiplie par } z \textbf{ membre à membre attention au signe de } z\textbf{)}$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall z \in \boxed{\mathbb{R}_-^*}, \quad x \leqslant y \boxed{\Leftrightarrow} xz \geqslant yz \quad \textbf{(avec équivalence si } z < 0\textbf{)}$$

2) **On ajoute les inégalités membre à membre**

(i) $\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{cases} x \leqslant y \\ z \leqslant t \end{cases} \Rightarrow x+z \leqslant y+t$

(ii) Généralisation (l'occasion d'introduire la notation Σ) :

$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad [\forall i \in [\![1,n]\!], \ x_i \leqslant y_i] \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \leqslant \sum_{i=1}^n y_i$$

3) **On multiplie les inégalités membre à membre, (attention à la positivité)**

(i) $\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant z \leqslant t \end{cases} \Rightarrow 0 \leqslant xz \leqslant yt$

(ii) Généralisation (l'occasion d'introduire la notation Π) :

$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad [\forall i \in [\![1,n]\!], \ 0 \leqslant x_i \leqslant y_i] \Rightarrow 0 \leqslant \prod_{i=1}^n x_i \leqslant \prod_{i=1}^n y_i$$

Remarques (A retenir)

- Dans les implications ci-dessus, il n'y a pas équivalence. Trouvez des contre-exemples.
- ON NE PEUT PAS SOUSTRAIRE NI DIVISER DES INÉGALITÉS.
- On vérifie bien la positivité/négativité avant de multiplier.

Exercice. Encadrer xy dans les trois situations suivantes $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 \leqslant y \leqslant 6 \end{cases}$, $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ -2 \leqslant y \leqslant 6 \end{cases}$, $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 3 \\ -5 \leqslant y \leqslant 6 \end{cases}$.

⚠ **Attention** ⚠ On ne multiplie pas bêtement membre à membre

Théorème (Conservation des inégalités par application de fonction)

Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$.

- Si f est croissante sur I alors $\begin{cases} a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b) \\ a < b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b) \end{cases}$.
- Si f est décroissante sur I alors $\begin{cases} a \leqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b) \\ a < b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b) \end{cases}$.
- Si f est strictement croissante sur I alors $\begin{cases} a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \leqslant f(b) \\ a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b) \end{cases}$.
- Si f est strictement décroissante sur I alors $\begin{cases} a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \geqslant f(b) \\ a < b \Leftrightarrow f(a) > f(b) \end{cases}$.

⚠ **Attention** ⚠ Seule la stricte monotonie assure l'équivalence.

Exemples A retenir

- Si $(x, y) \in$ alors $x \leqslant y \Longleftrightarrow x^2 \leqslant y^2$.
- Si $(x, y) \in$ alors $x \leqslant y \Longleftrightarrow x^2 \geqslant y^2$.
- Si $(x, y) \in$ alors $x \leqslant y \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{y}$.
- Si $(x, y) \in$ alors $x \leqslant y \Longleftrightarrow \ln x \leqslant \ln y$.
- Si $(x, y) \in$ alors $x \leqslant y \Longleftrightarrow e^x \leqslant e^y$.
- Si $(x, y) \in$ alors $x \leqslant y \Longleftrightarrow \cos x \leqslant \cos y$.
- Si $(x, y) \in$ alors $x \leqslant y \Longleftrightarrow \cos x \geqslant \cos y$.

Exercice.

1) Encadrer $\dfrac{1}{x+2}$ sachant que $2 \leqslant x \leqslant 4$ puis $-5 \leqslant x \leqslant -3$. Que dire de $\dfrac{1}{x+2}$ si $-4 \leqslant x \leqslant -1$?
2) Résoudre l'inéquation (E) $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{3}$.
3) Résoudre l'inéquation (E): $\sqrt{2-x} \leqslant \sqrt{x+1}$.
4) Résoudre l'inéquation (E): $\ln(x+2) \leqslant \ln(x) + 3$.

Remarques (Conservation des égalités par application de fonction)

Comme conséquence du théorème précédent et parce que $a = b$ est équivalent à $a \leqslant b$ et $a \geqslant b$:

- si f est strictement monotone sur I et $(a, b) \in I^2$ alors $a = b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$.

On verra plus tard une hypothèse plus précise encore, l'injectivité de l'application f.

Exemples A retenir

- Si $(x, y) \in$ alors $x = y \iff x^2 = y^2$.
- Si $(x, y) \in$ alors $x = y \iff \ln x = \ln y$.
- Si $(x, y) \in$ alors $x = y \iff \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y$.
- Si $(x, y) \in$ alors $x = y \iff \cos x = \cos y$.
- Si $(x, y) \in$ alors $x = y \iff \sin x = \sin y$.

Exercice. Résoudre (E): $x = \sqrt{x+2}$.

Exercice. Résoudre (E): $\ln(x+3) - \ln(x+1) = \ln(2-x)$.

Méthode pratique (Démontrer l'égalité $f(x) \leqslant g(x)$ pour $x \in I$)

1) **Tableau de signes**. Se ramener à l'étude du signe de $f(x) - g(x)$ à l'aide d'un tableau de signe si $f - g$ est une fonction fraction rationnelle par exemple.
2) **Étude de fonction**. Se ramener à l'étude du signe de $f(x) - g(x)$ en étudiant la fonction $f - g$.
3) **Construire l'inégalité**. Partir de $x \in I$, pour aboutir à $f(x) \leqslant g(x)$ par déductions successives.
4) **Raisonnement par équivalence**. En raisonnant par équivalence, $f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow VRAI$. Il peut d'ailleurs plus élégant, d'effectuer ce raisonnement au brouillon puis au propre de partir de l'inégalité "VRAI" pour aboutir à $f(x) \leqslant g(x)$ comme dans la méthode 3.
5) **Récurrence**. Effectuer une récurrence si $I = \mathbb{N}$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{x+2}{x+1} \geqslant \dfrac{-x+3}{x+2}$.

Exercice. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin x \leqslant x$.

Exercice. Montrer que: $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$. En déduire que: $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^2, \quad ab + bc + ac \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.

I.2 Valeur absolue

Définition (Valeur absolue)

La valeur absolue d'un nombre réel x est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} = \max(x, -x).$$

Remarques (A retenir ! Interprétation de $|x| \leqslant d$ et $|x-a| \leqslant d$)

Ici x, a, d désignent des réels avec de plus $d \geqslant 0$. On a:

$$\boxed{|x| \leqslant d \Leftrightarrow -d \leqslant x \leqslant d}.$$

Très important car permet de se débarasser de la valeur absolue au prix de deux inégalités au lieu d'une seule.
$|x-a|$ mesure la distance entre les deux réels x et a . Donc $|x-a| \leqslant d$ signifie que la distance de x à a est inférieure à d, avec,

$$\boxed{|x-a| \leqslant d \Leftrightarrow a-d \leqslant x \leqslant a+d}.$$

On a aussi:

$$\boxed{|x-a| \geqslant d \Leftrightarrow x-a \geqslant d \text{ ou } x-a \leqslant -d}.$$

Illustration :

Propriétés (de la valeur absolue)

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $|-x| = |x|$

3) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.

4) $|xy| = |x||y|$; si $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

5) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|x^n| = |x|^n$.
En particulier $|x^2| = |x|^2 = x^2$.

Exercice. Résoudre les équations ou inéquations:

1) $|3x-2| = |2x+5|$ 2) $|3x-2| \leqslant 4$ 3) $|5x-4| > 3$

⚠ **Attention** ⚠ Que vaut $\sqrt{x^2}$?....$|x|$.

Théorème (Inégalité triangulaire)

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{|x+y| \leqslant |x| + |y|}.$$

⚠ **Attention** ⚠ La valeur absolue d'une somme n'est pas égale à la somme des valeurs absolues.
Conséquences

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|x-y| \leqslant |x| + |y| \qquad ||x| - |y|| \leqslant |x-y| \quad \text{(inégalité triangulaire renversée).}$$

- Pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Exercice. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$.

I.3 Parties de $\mathbb{R}$

Définition (Intervalles de $\mathbb{R}$)

On distingue neuf types d'intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1) $[a,b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leqslant x \leqslant b\}$: intervalle **fermé**, borné ou segment
2) $[a,b[= \{x \in \mathbb{R};\ a \leqslant x < b\}$: intervalle **semi-ouvert**, borné
3) $]a,b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leqslant b\}$: intervalle **semi-ouvert**, borné
4) $]a,b[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$: intervalle **ouvert**, borné
5) $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$: intervalle **ouvert**
6) $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leqslant a\}$: intervalle **fermé**
7) $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$: intervalle **ouvert**
8) $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R};\ a \leqslant x\}$: intervalle **fermé**
9) $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$: intervalle **fermé** et **ouvert**

Théorème (Caractérisation des intervalles)

Soit I une partie de $\mathbb{R}$. I est un intervalle si et seulement si :

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \ [a,b] \subset I.$$

Définition (Parties majorée, minorée)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ (pas forcément un intervalle donc...)

- A est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que: $\forall x \in A,\ x \leqslant M$. M est appelé majorant.
- A est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que: $\forall x \in A,\ m \leqslant x$. m est appelé minorant.
- A est **bornée** si A est majorée et minorée i.e. il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que: $\forall x \in A,\ |x| \leqslant K$.
- Majorer (minorer) A c'est trouver un majorant (minorant) de A.

Exemples L'ensemble $A = \{3\cos x + 2\sin x \ /\ x \in \mathbb{R}\}$ est majoré et minoré.

Remarques (Ordre des quantificateurs)

A est majorée si : $\exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in A,\ \ x \leqslant M$.
Que pensez-vous de la phrase quantifiée : $\forall x \in A,\ \ \exists M \in \mathbb{R} \,/\, x \leqslant M$? A-t-elle le même sens que la phrase ci-dessus, est-elle vraie?

Définition (Maximum, minimum)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$

- Si A est majorée et possède un majorant qui est dans A, il est unique et on l'appelle maximum de A noté $\max A$.
- Si A est minorée et possède un minorant qui est dans A, il est unique et on l'appelle minimum de A noté $\min A$.

Exemples L'ensemble $A = \{\frac{1}{x+1} \,/\, x \in \mathbb{R}_+\}$ est borné, admet un maximum mais pas de minimum.

II Généralités sur les fonctions de la variable réelle

Une **fonction** $f : x \mapsto f(x)$ est une correspondance qui à un réel x associe au plus un réel $f(x)$.
L'**ensemble de définition** de la fonction f est

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \text{ existe } \}.$$

On parle d'**application** lorsque que tous les éléments dans l'ensemble de départ admettent une image (tous les éléments du départ sont alors dans l'ensemble de définition). On note $f : I \to J$ pour indiquer que l'ensemble de départ est I et l'ensemble d'arrivée est J. Notons que l'ensemble d'arrivée n'est pas forcément l'ensemble exact des valeurs prises par la fonction, l'ensemble peut être plus grand.

Notation. On rencontrera les notations suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad f : x \mapsto f(x) \qquad f : I \to J.$$

Exemples

$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$, $\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1,+\infty[\\ x & \mapsto & \frac{1}{x+1} \end{array}$ sont des applications.

$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x+1} \end{array}$ n'en sont pas. Pourquoi?

Notation. On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^I$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$.

> ✎ **Méthode pratique** ✎ **(Déterminer l'ensemble de définition)**
>
> Pour déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f on rédigera ainsi:
> "Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow$ ..... "
> Et on listera dans les ...., toutes les contraintes, qui ramèneront alors à la résolution d'équations, d'inéquations.

Exercice. Donner les ensembles de définitions des fonctions d'expression $f : x \mapsto \sqrt{3-x}$, $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{2-x}\right)$.

On peut restreindre une application à un ensemble de départ $X \subset I$, on note $f_{|X}$, appelée **restriction** de f à X.

⚠ **Attention** ⚠ On distiguera bien la fonction f de son expression $f(x)$.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}_f$ la **courbe représentative** de f, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ où x appartient à l'ensemble de définition de f.

II.1 Rappel : les fonctions usuelles de terminale

Fonctions affines, $\sqrt{\ }$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, cos, sin, exp, ln.
Donner les ensembles de définitions et les graphes de ces fonctions.

II.2 Parité-Périodicité

> **Définition (Parité)**
>
> Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. On suppose $\mathcal{D}$ symétrique i.e.: $x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow -x \in \mathcal{D}$.
>
> - f est **paire** si: $\forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = f(x)$.
> $\mathcal{C}_f$ est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
> - f est **impaire** si: $\forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = -f(x)$.
> $\mathcal{C}_f$ est alors symétrique par rapport à O.

✎ Méthode pratique ✎ (Étude de la parité)

Pour étudier la parité d'une fonction f, après avoir observé que l'ensemble de définition est symétrique **on calcule** $f(-x) = ...$

Exemples

- $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto x^2$ sont paires.
- $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto x^3$ sont impaires.

Exercice. Étudier la parité de $f : x \mapsto \cos(x^2)$, $g : x \mapsto 3x^5 + x^3 - 7x$.

Définition (Périodicité)

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. f est dite **périodique** s'il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$, appelée période, telle que:

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad x + T \in \mathcal{D} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x+T) = f(x).$$

f est alors dite T-périodique. $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur de coordonnées $(T, 0)$.

✎ Méthode pratique ✎ (Étude de la périodicité)

Pour étudier la périodicité d'une fonction f, après avoir "intuité" la période T, **on calcule** $f(x+T) = ...$

✎ En pratique ✎

Exemple $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont 2π-périodiques

Exercice. Étudier la périodicité de $f : x \mapsto \cos(2\pi x)$.

II.3 Opérations sur les fonctions

II.3.a Opérations algébriques

Soient f et g définies sur un ensemble D à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit:

- la somme $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$
- le produit $f \times g : x \mapsto f(x)g(x)$
- la multiplication par un scalaire λ, $\lambda\dot{f} : x \mapsto \lambda f(x)$
- l'inverse: $\dfrac{1}{f} : x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$
- le quotient: $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Remarques (Strucutre de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$)

- Les opérations $+$ et $\times$ sont commutatives, associatives, $\times$ est distributive par rapport à $+$. L'addition possède un élément neutre l'application nulle $x \mapsto 0$ et le produit possède un élément neutre l'application $x \mapsto 1$. On verra plus tard que ces propriétés font de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \dot{})$ un espace vectoriel et de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \times)$ un anneau.

- ⚠ **Attention** ⚠ $f \times g = 0$ ne signifie pas que l'une des deux applications f ou g est nulle (contre-exemple?). On dira que l'anneau $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +\times)$ n'est pas intègre.

II.3.b Composition

Définition (Composition)

Soient I et J deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications.
On suppose que : $\quad \forall x \in I,\ \ f(x) \in J$ (que l'on note $f(I) \subset J$).
On peut alors définir l'application $x \mapsto g(f(x))$ que l'on note $g \circ f$ (dire "g rond f") :

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}.$$

Exercice. $x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ est la composée de deux applications usuelles. Lesquelles? Quelles est l'ensemble de définition. $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x+3)}$ est la composée de trois applications usuelles. Lesquelles? Quelles est l'ensemble de définition.

⚠ **Attention** ⚠ La loi $\circ$ est associative mais pas commutative.
Exercice. Donner les ensembles de définition et l'expression de $f = \sqrt{\ } \circ \cos$ et $g = \cos \circ \sqrt{\ }$

II.4 Limites

II.4.a Opération sur les limites

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et a un élément de I, ou une de ses extrémités ou $-\infty$ ou $+\infty$.

- **Somme**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

⚠ **Attention** ⚠ Dans le cas de la forme indéterminée $+\infty - (+\infty)$ tous les cas peuvent se produire:

- ▶ $f(x) = x+1$, $g(x) = x$, alors $f(x) - g(x) = 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
- ▶ $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2$, alors $f(x) - g(x) = x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- ▶ $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + x$, alors $f(x) - g(x) = -x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

- **Multiplication par un scalaire**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (\lambda f(x))$	λl	$+\infty$ si $\lambda > 0$ 0 si $\lambda = 0$ $-\infty$ si $\lambda < 0$	$-\infty$ si $\lambda > 0$ 0 si $\lambda = 0$ $+\infty$ si $\lambda < 0$

- **Produit**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

⚠ **Attention** ⚠ Dans le cas de la forme indéterminée $0 \times (\pm\infty)$ tous les cas peuvent se produire:

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x$, alors $f(x)g(x) = 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
- $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = x$, alors $f(x)g(x) = \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^2$, alors $f(x)g(x) = x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

- **Inverse**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	0^+	0^-
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$	$\dfrac{1}{l}$	0	$+\infty$	$-\infty$

☞ **Explication** ☜ Par $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0^+$ (resp. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0^-$), il faut comprendre

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \\ f(x) > 0 \text{ (resp. } f(x) < 0\text{) au voisinage de } a \end{cases}$$

.

- **Quotient**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	0	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	0	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{l}{l'}$	0	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

⚠ **Attention** ⚠ Dans le cas de la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ tous les cas peuvent se produire:

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
- $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} = x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Contre-exemples similaires pour le cas $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, en prenant les inverses des fonctions f et g ci-dessus.

II.4.b Techniques usuelles élémentaires

Rappels des croissances comparées élémentaires.

Théorème (Croissances comparées élémentaires)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x\ln x = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$$

Quelques exemples pour illustrer des **techniques incontournables**.

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (3x^2 + 2x + 7)$

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (2x^3 + 4x^2 + 7x - 1)$

3) Plus généralement, les limites de polynômes en $\pm\infty$

4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x-5}{3x^2+2x+7}$

5) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x^3+7x+5}{2x^3+2x^2-3}$

6) Plus généralement, les fractions rationnelles en $\pm\infty$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-3\,\mathrm{e}^{x}+2}{5\,\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{-x}-5}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\ln x}$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}+x+3\ln x-12}{\mathrm{e}^{x}-5\ln x+9x}$

10) Fractions rationnelles en valeur finie:

$$\lim_{1} \frac{3x^3+x-4}{x-1} \qquad \lim_{1} \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3} \qquad \lim_{2} \frac{x^3-x^2-x-2}{x^2-x-2}$$

(l'occasion de voir la factorisation par $x-1$)

Remarques (Interprétation géométrique de limites)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) Si pour $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote la droite verticale d'équation $x = x_0$.

2) Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote la droite horizontale d'équation $y = l$.

3) S'il existe m et p réels, tels que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - (mx+p)) = 0$ alors la droite d'équation $y = mx+p$ est aymptote à la courbe.
Le signe de $f(x)-(mx+p)$ donne la position de la courbe par rapport à la droite. Si $\geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$) alors la courbe est au-dessus (resp. au-dessous) de la droite.
A défaut, on peut étudier la limite en $\pm\infty$ et obtenir 0_+ (resp. 0_-) alors la courbe est au-dessus (resp. au-dessous) de la droite au voisinage de ∞.

II.4.c Composition des limites

Théorème (Composition des limites)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$ où I et J sont deux intervalles.
Soient $a \in I$, $b \in J$ avec a, b éventuellement des extrémités de ces intervalles, éventuellement $\pm\infty$ et $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{y\to b} g(y) = l \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} (g\circ f)(x) = l$.

Exemple

1) Calculer $\lim\limits_{x\to -2_+} \sqrt{\dfrac{1}{x+2}}$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2+2x+1}$.

II.5 Continuité

Définition (Continuité)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction où I est un intervalle.

- Soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

☞ **Explication** ☜ Graphiquement, la courbe d'une fonction continue se dessine sans lever le crayon. [Dessins]

Remarques

- **Continuité à gauche et à droite** On dit que f est continue à gauche en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$. On peut définir de la même façon la continuité à droite.
- **Prolongement par continuité** Soit $x_0 \in I$ et f définie sur $I \setminus \{x_0\}$. On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et est finie, que l'on note l. On peut alors prolonger f par continuité en x_0 en posant

$$\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array}.$$

  $\widetilde{f}$ est appelé le prolongement par continuité de f en x_0. Cette fonction est souvent encore notée f.
  Par exemple, la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin x}{x} \end{array}$ est prolongeable par continuité en 0 en la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

- **Fonctions usuelles du lycée** Elles sont continues là où elles sont définies (polynomiales, rationnelles, $\sqrt{}$, cos, sin, exp, ln, valeur absolue)

Exercice. Prolonger par continuité en 0 la fonction $x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$.

Théorème (Opérations sur les fonctions continues)

La somme, le produit, l'inverse (quand le dénominateur ne s'annule pas), le rapport (quand le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions continues sur I est continue sur I.
La composée d'une fonction f continue sur I et d'une fonction g continue sur J où $f(I) \subset J$ est continue sur I.

✎ Méthode pratique ✎ (Comment étudier la continuité d'une fonction)

- **Continuité en un point** $x_0 \in I$:
  - ▶ **Méthode 1** : on montre que $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$.
  - ▶ **Méthode 2** : si l'expression de f diffère à gauche et à droite de x_0, on montre que $f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} f(x_0)$ et $f(x) \underset{x \to x_0^-}{\longrightarrow} f(x_0)$.
- **Continuité sur un intervalle** I. On utilise le théorème ci-dessus d'opérations sur les fonctions continues en “décortiquant” la fonction à étudier.

Exercice. Étudier la continuité de $f : x \mapsto \sqrt{3-x}$, $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{2-x}\right)$.

Exercice. Étudier la continuité en 0 de $x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

II.6 Variations

Définition (Monotonie)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est **croissante** (resp. **décroissante**) sur I si:

$$\forall (x,x') \in I^2, \quad x \leqslant x' \Rightarrow f(x) \leqslant f(x') \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(x')).$$

- On dit que f est **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) sur I si:

$$\forall (x,x') \in I^2, \quad x < x' \Rightarrow f(x) < f(x') \quad (\text{resp. } f(x) > f(x')).$$

- On dit que f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur I si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur I.

✎ **En pratique** ✎ On a déjà vu, que l'hypothèse de stricte monotonie est très importante lorsque l'on souhaite appliquer une fonction à une inégalité dans une inéquation.
Si f est strictement croissante (resp. décroissante) sur un ensemble I, alors:

$$\forall (x,x') \in I^2, \quad x < x' \Leftrightarrow f(x) < f(x') \quad (\text{resp. } f(x) > f(x')).$$

Théorème (Opérations sur les fonctions monotones)

- La somme de fonction croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).
- La somme d'une fonction croissante (resp décroissante) et d'une fonction strictement croissante (resp. décroissante) est strictement croissante (resp. décroissante).
  En particulier la somme de fonction strictement croissantes (resp. décroissantes) est strictement croissante (resp. décroissantes).
- La multiplication par un scalaire positif conserve la monotonie, par un scalaire négatif inverse la monotonie.
- La composée de fonctions (strictement) monotones est (strictement) monotone, que l'on peut résumer ainsi :

$$\nearrow \circ \nearrow = \nearrow \qquad \nearrow \circ \searrow = \searrow \qquad \searrow \circ \nearrow = \searrow \qquad \searrow \circ \searrow = \nearrow .$$

Exercice. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que le produit de fonctions croissantes n'est pas forcément croissante.

Exercice. Étudier la monotonie sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \mathrm{e}^{x+1} + 3x - 1$.

II.7 Bijection

Définition (Bijection)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que f réalise une bijection de I vers J lorsque tout élément de J admet un unique antécédent par f dans I.
  Autrement dit: $\forall y \in J, \quad \exists! x \in I \;/\; y = f(x)$.
- On définit alors la bijection réciproque, notée $f^{-1} : J \to I$ qui à $y \in J$ associe l'unique antécédent par f dans I.
- L'application f^{-1} vérifie :

$$\forall x \in I,\ (f^{-1} \circ f)(x) = x \qquad \text{que l'on note autrement} \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I\,.$$

$$\forall y \in J,\ (f \circ f^{-1})(y) = y \qquad \text{que l'on note autrement} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J\,.$$

$$\forall (x,y) \in I \times J, \quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

- $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

Théorème (Bijection monotone)

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que

(i) f continue sur I

(ii) f strictement monotone sur I.

Alors f réalise une bijection de I vers $J = f(I)$ de fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ avec de plus:

1) J est un intervalle dont les bornes sont les images par f (ou les limites) des bornes de I

2) f^{-1} est strictement monotone sur J de même sens de variations que f

3) f^{-1} est continue sur J

Exemple La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$, de fonction réciproque $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$.

Remarques (Expression de la réciproque)

En général, il n'est pas possible d'obtenir une expression de la réciproque à l'aide de fonction usuelles. Car pour obtenir la réciproque il faut résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x, pas toujours facile, voire impossible à résoudre à l'aide de fonction usuelles. Mais parfois oui...exemple ci-dessous.

Exercice. On pose $f : x \mapsto \ln(x^2+1)+1$. Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser. Puis donner l'expression de la réciproque.

✎ **En pratique** ✎ L'hypothèse de bijection est très importante lorsque l'on souhaite appliquer une fonction à une égalité dans une équation.
Si f réalise une bijection de I vers $f(I)$, alors:

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad a = b \Leftrightarrow f(a) = f(b).$$

✎ Méthode pratique ✎ (Usage du TBM pour obtenir existence et unicité de la solution)

On utilise le théorème de la bijection monotone pour prouver l'existence et l'unicité de la solution d'une équation (E) que l'on ne sait pas résoudre de manière exacte.

1) On met l'équation sous forme $f(x) = 0$.

2) On montrer que f réalise une bijection d'un intervalle I vers $J = f(I)$.

3) On vérifie que $0 \in J$, qui admet alors un unique antécédent par f dans I.

4) On conclut.

Exercice. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution réelle à l'équation $\mathrm{e}^x = 2 - x$. Puis montrer que cette solution appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

Remarques

Même si le TBM sera très souvent le moyen de prouver qu'une fonction réalise une bijection, une fonction bijective peut n'être ni continue, ni monotone. Contre-exemple?

II.8 Dérivabilité

II.8.a Définitions

Définition (Dérivabilité)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie ou de manière équivalente $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie. On note cette limite $f'(a)$. Le rapport $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ou $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est appelé taux d'accroissement de f en a.

- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I, on note alors f' la fonction dérivée de f. L'ensemble des fonctions dérivables sur I est noté $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$.

- Si f est dérivable en $a \in I$ alors la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a a pour coefficient directeur $f'(a)$ et pour équation
$$y = (x - a)f'(a) + f(a).$$

Exemples

- $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0, $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0,

Remarques

- **Fonctions usuelles du lycée.** Elles sont dérivable là où elles sont définies (polynomiales, rationnelles, cos, sin, exp, ln) **SAUF** les fonctions racine et valeur absolue qui ne sont pas dérivables en 0.
- **Abus de notation.** Le "prime" dans f' doit porter sur une fonction et non sur expression. Il n'est donc pas correct d'écrire $(f(x))'$, $(cos(x))'$, $(x^3)'$. Dans certains cas (très rares), on rencontrera cet abus et on l'évitera autant que possible.
- **Dérivabilité à gauche, à droite.** On dit que f est dérivable à gauche en a si $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ou $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe, limite que l'on note alors $f'_g(a)$. On peut définir de la même façon la dérivabilité à droite, que l'on note $f'_d(a)$.
- **Dérivable $\Rightarrow$ continue.** Si f est dérivable sur I alors elle est continue sur I. La réciproque est fausse. Donner un contre-exemple.

Théorème (Limites usuelles (découlant de taux d'accroissement))

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Rappel des dérivées des fonctions usuelles

Expression de la fonction	Ensemble de dérivabilité	Expression de la dérivée
x^n où $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
x^n où $n \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$
$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x

II.8.b Opérations

Théorème (Opérations sur les fonctions dérivables)

La somme, le produit, l'inverse (quand le dénominateur ne s'annule pas), le rapport (quand le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions dérivables sur I est dérivable sur I.
Avec les formules :

$$(u+v)' = u'+v' \qquad (\lambda u)' = \lambda u' \qquad (uv)' = u'v+uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Théorème (Dérivée de la composition)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, deux fonctions $u : I \to \mathbb{R}$, $v : J \to \mathbb{R}$ dérivables tel que $u(I) \subset J$. On peut donc définir $v\circ u : I \to \mathbb{R}$.
Alors $v \circ u$ dérivable sur I avec:

$$\forall x \in I,\ (v\circ u)'(x) = v'(u(x))u'(x) \qquad \text{ou encore} \qquad (v\circ u)' = v'\circ u \times u'.$$

Conséquence : si u une fonction dérivable sur I :

$(\sqrt{u})' =$ $\qquad$ $(u^n)' =$ $\qquad$ $(\mathrm{e}^u)' =$ $\qquad$ $(\ln u)' =$ $\qquad$ $(\cos u)' =$ $\qquad$ $(\sin u)' =$

A retenir aussi : si u est dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors $\ln|u|$ est dérivable sur I avec $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$. *(Conséquence de la composition de trois fonctions)*

✎ Méthode pratique ✎ (Comment étudier la dérivabilité d'une fonction)

- **Dérivabilité en un point** $a \in I$:
  - ▶ **Méthode 1** : on montre que $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.
  - ▶ **Méthode 2** : si l'expression de f diffère à gauche et à droite de a, on montre que $\displaystyle\lim_{x\to a_-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $\displaystyle\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existent, sont finies et sont égales.
- **Dérivabilité sur un intervalle** I. On utilise les théorèmes ci-dessus d'opérations sur les fonctions dérivables en "décortiquant" la fonction à étudier.

Exercice.

1) Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{x-2}$, puis étudier la continuité et la dérivabilité et calculer la dérivée.

2) Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sqrt{x^2-3x+2}$, puis étudier la continuité et la dérivabilité et calculer la dérivée.

3) Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \ln\left|\dfrac{x}{2-x}\right|$. Etudier la continuité la dérivabilité et calculer la dérivée.

⚠ **Attention** ⚠ On tâchera de ne pas confondre une fonction f avec son expression $f(x)$.
En particulier, **ON N'ÉCRIT PAS** $f(x)$ est continue (ou dérivable) mais f est continue (ou dérivable).

II.8.c Variations

Théorème (Variations et dérivées)

Soit f une fonction dérivable sur un $\boxed{\text{intervalle } I}$.

- f est croissante si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
- f est constante si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ et f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$ et f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.

⚠ **Attention** ⚠ La réciproque des deux dernières propriétés est fausse. Contrexemple?

⚠ **Attention** ⚠ On simplifera donc toujours au maximum l'expression de la dérivée pour en effectuer l'étude de signe.

II.8.d Dérivées successives

Définition (Dérivées successives)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- Si f' est dérivable sur I, on note $f'' = (f')' = f^{(2)}$. On définit également $f''' = f^{(3)}$, $f^{(4)}$,... les dérivées successives de f.
  Plus rigoureusement, on définit les dérivées successives par récurrence :
  $$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k+1)} = (f^{(k)})' \end{cases}.$$
- Pour $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{D}^k(I)$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I.
- Pour $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I dont la dérivée k-ième est continue. En particulier, $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues. On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I. Enfin, si $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$.

Théorème (Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$)

Soient deux fonctions u, v de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Alors:

1) $u + v$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I avec $(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$
2) uv est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I
3) λf est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I $(\lambda u)^{(n)} = \lambda u^{(n)}$
4) si u ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{u}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I
5) si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u}{v}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
6) $v \circ u$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I lorsque u est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et v sur $u(I)$.

Remarques

- **Fonctions usuelles du lycée.** Les fonctions polynomiales, rationnelles, cos, sin, exp, ln sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ là où elles sont définies.
- **Abus de notation.** Le "(k)" dans $f^{(k)}$ doit porter sur une fonction et non sur expression. Il n'est donc pas correct d'écrire $(f(x))^{(k)}$, $(cos(x))^{(k)}$, $(x^3)^{(k)}$. Dans certains cas (très rares), on rencontrera cet abus et on l'évitera autant que possible.

Exercice. Calculer les dérivées successives de $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}$, de $x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$, de $x \mapsto \dfrac{1}{x+3}$.

II.8.e Dérivabilité réciproque

Théorème (Dérivabilité réciproque)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to J$ tels que

(i) f dérivable sur I avec: $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$

(ii) f est une bijection de I dans J

Alors $f^{-1} : J \to I$ est dérivable sur J de dérivée

$$\forall y \in J, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \text{ou encore} \quad (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

☞ **Explication** ☜ Pour retrouver la formule de dérivation on peut dériver la relation $(f \circ f^{-1})(y) = y$ qui donne $f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1$ et donc $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

III Etude de fonction

L'objectif est de faire le tracé de la courbe représentative.

III.1 Des cas très particuliers

Imaginons que l'on connaisse la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f (par ex graphe de fonctions usuelles), alors la courbe de:

- $x \mapsto f(x+a)$ où $a \in \mathbb{R}$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par translation de vecteur de coordonnées $(-a, 0)$
- $x \mapsto f(x) + b$ où $a \in \mathbb{R}$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par translation de vecteur de coordonnées $(0, b)$
- $x \mapsto f(-x)$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par symétrie par rapport à (Oy)

Et un peu plus compliqué (il n'est pas nécessaire de retenir le vocabulaire), on étudiera des exemples.

- $x \mapsto \lambda f(x)$ où $\lambda > 0$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par l'affinité de base (Ox) de rapport λ
- $x \mapsto f(\lambda x)$ où $\lambda > 0$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par l'affinité de base (Oy) de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$.

Exercice. Tracer les graphes de $x \mapsto \sqrt{x-3}$, $x \mapsto \ln x + 2$, $x \mapsto (2-x)^3$, $x \mapsto \cos(2x)$, $x \mapsto 3\sin x$.
Application de la mise sous forme canonique: tracer le graphe de $x \mapsto x^2 - 2x - 3$ puis discuter du nombre de solutions de l'équation (E) $f(x) = \lambda$ en fonction de λ.

III.2 Etude générale

✎ Méthode pratique ✎ (Plan d'étude d'une fonction)

1) Déterminer l'ensemble de définition et étudier la continuité et la dérivabilité

2) Parité, périodicité éventuelles pour réduire l'intervalle d'étude et déduire les symétries qui en découlent.
   - si f T-périodique, on étudie sur un intervalle d'amplitude T puis on répète/translate la courbe
   - si f est paire ou impaire on étudie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ puis on effectue la symétrie ad hoc

3) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de definition et reconnaître les asymptotes éventuelles.

4) Calculer la dérivée, la factoriser, étudier son signe et tableau de variations.

5) Tracer la courbe représentative en tenant compte des asymptotes éventuelles, de quelques points particuliers et tangentes. L'usage de la calculatrice ne présente aucun intérêt, ni pour obtenir un tableau de valeurs remarquables, ni pour reproduire le graphe (souvent moche) affiché sur l'écran.

Exemples

1) Étude de $f : x \mapsto \cos^3 x$.

2) Étude de $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

3) Étude de $f : x \mapsto \dfrac{3x-1}{x+2}$. Discuter du nombre de solutions de l'équation $f(x) = \lambda$ en fonction de λ.

Remarques (A quoi sert une étude de fonction:)

1) trouver un maximum et/ou un minimum (local ou global) s'il existe, d'une fonction

2) **TRES IMPORTANT** prouver des inégalités. Pour pouver $f \leqslant g$, on étudie $g - f$ pour prouver la positivité. Exemple: $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$

3) résoudre, ou cas échéant discuter du nombre de solutions, une équation ou inéquation $f(x) \leqslant \lambda$ ou $f(x) = \lambda$