

## Le second degré

**Exercice 1** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes:

1)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

2)  $4x^2 + x - 6 = 0$

3)  $x^2 - 2x + 2 = 0$

4)  $4x^2 - 4x + 1 = 0$

**Exercice 2** Sans utiliser le discriminant, résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes.

1) En factorisant.

-a-  $3x^2 + 4x = 0$

-d-  $x^2 + 16 = 0$

-g-  $(3x - 7)^2 - 4(x + 1)^2 = 0$

-b-  $x^2 - 9 = 0$

-e-  $(x - 3)^2 - 25 = 0$

-c-  $4x^2 - 81 = 0$

-f-  $(x + 2)^2 + 9 = 0$

2) En repérant une racine évidente et en forçant la factorisation.

-a-  $x^2 - 7x + 6 = 0$

-c-  $5x^2 + 9x + 4 = 0$

-e-  $ax^2 + bx + c = a - b + c$  où  
 $a, b$  et  $c$  sont trois paramètres  
réels avec  $a \neq 0$

-b-  $6x^2 - 7x + 1 = 0$

-d-  $13x^2 + 15x + 2 = 0$

**Exercice 3** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations inéquations suivantes

1) -a-  $\frac{x}{3} + \frac{3}{x} = \frac{5}{2}$

-c-  $x^4 + x^2 - 6 = 0$

-e-  $3x + 2\sqrt{x} - 5 = 0$

-b-  $\frac{4}{x} + \frac{3}{x-1} = \frac{x}{4} + \frac{x-1}{3}$

-d-  $4x^4 - 20x^2 + 25 = 0$

2) -a-  $x \leq \frac{4}{x}$

-b-  $\frac{x+1}{x+2} \geq \frac{3-x}{x}$

-c-  $\frac{x+1}{3x-2} < 1$

-d-  $e^{4x} + e^{2x} - 6 < 0$

**Exercice 4.** (\*) Soit  $m$  un paramètre réel. Soit l'équation:

$$(E_m) \quad (m - 4)x^2 - 2(m - 2)x + m - 1 = 0.$$

1) Résoudre en fonction de  $m$  l'équation  $(E_m)$ .

2) Déterminer la valeur de  $m$  pour que l'une des solutions soit égale à 2. Déterminer alors l'autre solution.

**Exercice 5.** (\*\*) Déterminer les réels  $m$  et  $p$  pour que les équations

$$(E_1) \quad x^2 - (m + 1)x + m + p = 0$$

$$(E_2) \quad 2x^2 - (m - 1)x + 3p = 0.$$

admettent les mêmes solutions.

**Exercice 6.** (\*) Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$  non nuls

$$2 \left( \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) - 3 \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \boxed{+6} \geq 0. \quad \text{Indication : on pourra poser } X = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

**Exercice 7.** (\*\*) Déterminer l'ensemble des réels  $m$  pour que l'inégalité  $mx^2 + 2(m + 1)x + 25m + 12 \geq 0$  soit vérifiée pour tout réel  $x$ .

## Logique

**Exercice 8** Compléter les ... par le bon symbole :  $\Rightarrow$ ,  $\Leftarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ .

1)  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 16 \dots x = 4$

3)  $\forall x \in \mathbb{R}, x = \pi \dots \sin x = 0$

2)  $\forall z \in \mathbb{C}, z = \bar{z} \dots z \in \mathbb{R}$

4)  $\forall x \in [0, \pi], x = \frac{\pi}{2} \dots \cos x = 0$

**Exercice 9** On considère les quatre phrases quantifiées :

1)  $\exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$

2)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / x + y > 0$

3)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$

Ces phrases sont-elles vraies? Donner leur négation.

**Exercice 10** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Écrire à l'aide de quantificateurs :

1)  $f$  est majorée

6)  $f$  est croissante

2)  $f$  est bornée

7)  $f$  ne prend que des valeurs distinctes

3)  $f$  est paire

8)  $f$  atteint toutes les valeurs de  $n$

4)  $f$  ne s'annule jamais

9)  $f$  est inférieure à  $g$

5)  $f$  n'est pas la fonction nulle

10)  $f$  n'est pas inférieure à  $g$

## Raisonnement

**Exercice 11.** Par l'absurde

1) Montrer que 0 n'admet pas d'inverse dans  $\mathbb{R}$ .

2) Montrer par l'absurde que  $\sqrt{2}$  est irrationnel (c'est-à-dire ne peut s'écrire  $\frac{p}{q}$  où  $p$  et  $q$  sont deux entiers naturels avec  $q \neq 0$ ).

**Exercice 12.** Récurrence

Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ .

**Exercice 13.** Contraposition

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer par contraposition que si  $n^2 - 1$  n'est pas divisible par 8 alors  $n$  est pair.

**Exercice 14.** Disjonction de cas

Montrer que pour tout entier naturel  $n$  l'entier  $n(n+1)(2n+1)$  est un multiple de 3.