Les réponses aux questions doivent être soigneusement justifiées. La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale. Les **résultats** doivent être mis en évidence, **encadrés**. Vous pouvez sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que vous admettez les résultats non prouvés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Exercice 1 Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}$ les équation et inéquation :

$$(E) \quad x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 4 = 0 \qquad\qquad (F) \quad x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$$

1) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On pose $X = x + \dfrac{2}{x}$.

   -a- Montrer que x est solution de (E) si et seulement si X est solution d'une équation du second degré (E') qu'on déterminera.

   -b- Résoudre (E') puis en déduire la résolution de (E).

2) Résoudre l'inéquation $(F) \quad x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$.

Exercice 2 On pose $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f. *[On ne bâcle pas...]*.

2) Montrer que pour tout $x \in D_f$, $(f(x))^2 = 2x + 2|x-2|$. En déduire une expression simple de f sans les valeurs absolues.

3) Représenter graphiquement la fonction f sur D_f.

Exercice 3. Facultatif

1) Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$.

2) En déduire que pour tout $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

   A quelle condition a-t-on égalité?