Exercice 1 Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E) \quad x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 4 = 0.$$

1) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On pose $X = x + \dfrac{2}{x}$.

-a- Notons tout d'abord que $X^2 = x^2 + 4 + \frac{4}{x^2}$,

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{2}{x}\right) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (X^2 - 4) - 2X + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{x \text{ est solution de } (E) \Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 = 0 \ (E')}.$$

-b- Notons que $X^2 - 2X - 3 = (X+1)(X-3)$. Donc, $\boxed{\text{l'ensemble-solution de } (E') \text{ est } \{-1, 3\}}$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow x + \frac{2}{x} = -1 \quad \text{ou} \quad x + \frac{2}{x} = 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{(les discriminants valent } -7 \text{ et } 1 \text{ respectivement)} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 2. \end{aligned}$$

Tout ce qui précède est valable pour $x \neq 0$ notons que 0 n'est pas solution de (E).
Finalement, $\boxed{\text{l'ensemble-solution de } (E) \text{ est } \{1, 2\}}$.

2) **Méthode 1** : on adapte ce qui a été fait en 1) à la résolution de l'inéquation.

- Notons tout d'abord que 0 est solution de (F).
- Puis, soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} (F) &\Leftrightarrow x^2\left(x^2 - 2x + 1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \geqslant 0 \quad (\text{car } x^2 \geqslant 0) \\ &\Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 \geqslant 0 \quad (\text{en posant } X = x + \tfrac{1}{x}, \text{ calcul fait en 1)-a-}) \\ &\Leftrightarrow (X+1)(X-3) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{x} + 1\right)\left(x + \frac{2}{x} - 3\right) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 2}{x} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x^2 + x + 2)(x^2 - 3x + 2)}{x^2} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2) \geqslant 0 \quad (\text{car } x^2 \geqslant 0 \text{ et le discriminant de } 2x^2 - x + 2 \text{ est } < 0 \text{ avec } 2 > 0). \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[\quad (\text{règle du signe d'un trinôme}) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble-solution de } (F) \text{ est }]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[}$. On aura noté que 0 (qui est solution de (F)) appartient bien à ce dernier ensemble.

Méthode 2 : beaucoup plus efficace, on utilise le résultat de 1).
D'après 1), la fonction polynomiale $x \mapsto x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 4$ admet 1 et 2 pour racines, on peut donc factoriser par $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x-2)(x^2 + 2x + 2).$$

Le trinôme $x^2 + 2x + 2$ a pour discriminant $-7 > 0$, de plus $1 > 0$, donc le trinôme est strictement positif.
Par conséquent, la fonction polynomiale $x \mapsto x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 4$ est du signe de $(x-1)(x-2)$, donc d'après la règle du signe d'un trinôme, on obtient $\boxed{\text{l'ensemble-solution de } (F),\ ]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[}$.

Exercice 2 On pose $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

1) Notons $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de défintion de f. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \quad x \geqslant 1 \quad \text{et} \quad x + 2\sqrt{x-1} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x - 2\sqrt{x-1} \geqslant 0.$$

On note ces deux inéquations, $(E_1) \ \ x + 2\sqrt{x-1} \geqslant 0$ et $(E_2) \ \ x - 2\sqrt{x-1} \geqslant 0$.
Notons tout d'abord que pour $x \geqslant 1$ alors $x \geqslant 0$ et $2\sqrt{x-1} \geqslant 0$ donc $x + 2\sqrt{x-1} \geqslant 0$ et (E_1) est donc vérifiée.

Puis pour $x \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}(E_2) &\Leftrightarrow x^2 \geqslant (2\sqrt{x-1}) \quad (t \mapsto t^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+,\ 2\sqrt{x-1} \geqslant 0 \text{ et } x \geqslant 0)\\ &\Leftrightarrow 4(x-1) \geqslant x^2\\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 \geqslant 0 \text{ (ce qui est toujours vérifié).}\end{aligned}$$

Donc (E_2) est vérifié pour tout $x \geqslant 1$.
Conclusion: $\boxed{\text{l'ensemble de définition de } f \text{ est } \mathcal{D}_f = [1,+\infty[}$.

2) Soit $x \in [1,+\infty[$,

$$\begin{aligned}(f(x))^2 &= \left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right)^2 = \left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\right)^2 + 2\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \left(\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right)^2\\ &= x + 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{\left(x+2\sqrt{x-1}\right)\left(x-2\sqrt{x-1}\right)} + x - 2\sqrt{x-1}\\ &= 2x + 2\sqrt{x^2-4(x-1)} = 2x + 2\sqrt{(x-2)^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{(f(x))^2 = 2x + 2|x-2|}$$

On en déduit une expression plus simple en distinguant les cas:

- si $x \geqslant 2$, $(f(x))^2 = 2x + 2(x-2) = 4(x-1)$ alors en prenant la racine carrée et en constatant que $f(x) \geqslant 0$ (car somme de deux racines carrées), on a $f(x) = 2\sqrt{x-1}$
- si $1 \leqslant x \leqslant 2$, $(f(x))^2 = 2x - 2(x-2) = 4$ alors en prenant la racine carrée et en constatant que $f(x) \geqslant 0$ (car somme de deux racines carrées), on a $f(x) = 2$.

Conclusion: $\boxed{f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x-1} & \text{si } x \geqslant 2\\ 2 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2\end{cases}}$.

3) **Représentation graphique.**

- **Méthode 1**. En utilisant des transformations sur la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$.
  f est constante sur $[1, 2]$, puis sur $[2, +\infty[$, la courbe est obtenue, par translation de la courbe de $t \mapsto \sqrt{t}$ d'une unité vers la droite puis affinité ("dilatation") de rapport 2 dans la direction verticale
- **Méthode 2**. Par une méthode classique d'étude de variations de fonction.
  Sur $[1, 2]$, f est constante donc le tracé est immédiat.
  Sur $[2, +\infty]$, f est continue et dérivable comme composée de $x \mapsto x-1$ continue sur $[2, +\infty[$ à valeurs dans $[1, +\infty[$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ continue et dérivable sur $[1, +\infty[$.
  Avec pour $x \in [2, +\infty[$,

  $$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} > 0 \text{ donc } f \text{ est strictement croissante sur } [2, +\infty[.$$

  Puis on calcule la limite de f en $+\infty$, $\begin{cases} x-1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\\ 2\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\end{cases}$ donc par composition des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
  Notons enfin que $f'_d(2) = 1$ ce qui permet de placer la tangente au point d'abscisse 2, de coefficient directeur 1

Exercice 3. Facultatif

1) Soit $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$,
$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2=\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}\geqslant 0.$$
Donc : $\boxed{\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2}$.

2) Soit $(a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$, on utilise la question 1) trois fois en faisant des choix judicieux de x et y, pour obtenir :
$$(*)\qquad \frac{a+b}{a+c}+\frac{a+c}{a+b}\geqslant 2\qquad\qquad \frac{b+a}{b+c}+\frac{b+c}{b+a}\geqslant 2\qquad\qquad \frac{c+a}{c+b}+\frac{c+b}{c+a}\geqslant 2.$$
On somme ces trois inégalités et on regroupe par 2 les termes qui ont même dénominateur :
$$\frac{a+2b+c}{a+c}+\frac{a+b+2c}{a+b}+\frac{2a+b+c}{b+c}\geqslant 6.$$
La première fraction se décompose :
$$\frac{a+2b+c}{a+c}=\frac{a+c}{a+c}+2\frac{b}{a+c}=1+2\frac{b}{a+c}.$$
On décompose les deux autres fractions de la même façon et on regroupe les termes, pour obtenir
$$2\left(\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right)+3\geqslant 6.$$
On obtient alors comme demandé :
$$\boxed{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}}.$$
On a égalité si et seulement s'il y a égalité dans les trois égalités $(*)$ de départ. Or il y a égalité dans 1) si et seulement si $(x-y)^2=0$ c'est-à-dire $x=y$. Donc il y a égalité dans les trois inégalités initiales si et seulement si $a+b=a+c$ et $b+a=b+c$ et $c+a=c+b$ donc si et seulement si $a=b=c$.
Par conséquent, $\boxed{\text{il y a égalité si et seulement si } a=b=c}$.