Les réponses aux questions doivent être soigneusement justifiées. La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale. Les **résultats** doivent être mis en évidence, **encadrés**. Vous pouvez sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que vous admettez les résultats non prouvés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Exercice 1 Pour n entier naturel non nul, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{nx}}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $f_n(0) = 0$. On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n.

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f_n sur $\mathbb{R}^*$.

2) Calculer les limites de f_n en $+\infty$ et $-\infty$.

3) Étudier la continuité de f_n en 0 (éventuellement à gauche et à droite.)
En tenant compte de ce qui précède, étudier la dérivabilité de f_n en 0 (éventuellement à gauche et à droite.)

4) Dresser le tableau de variations de f_n.

5) On pose la fonction φ définie par $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-t} - (1-t) - \frac{t^2}{2}$.

   -a- Sans justifier la dérivabilité de φ et φ' sur $\mathbb{R}$, étudier les variations de φ' sur $\mathbb{R}_+$. Déduire alors les variations de φ sur $\mathbb{R}_+$.

   -b- Montrer alors que pour tout $t \geqslant 0$,
$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - (1-t) \leqslant \frac{t^2}{2}.$$

   -c- Prouver à l'aide de 5)-b- que pour tout $x > 0$,
$$0 \leqslant f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{2n^2 x}.$$
En déduire que la droite Δ_n d'équation $y = x - \dfrac{1}{n}$ est asymptote à $\mathcal{C}_n$ au voisinage de $+\infty$. Préciser la position relative de $\mathcal{C}_n$ et Δ_n.
On admet que Δ_n est aussi asymptote à $\mathcal{C}_n$ au voisinage de $-\infty$ et $\mathcal{C}_n$ est au-dessous de Δ_n sur $\mathbb{R}_-$.

6) Tracer $\mathcal{C}_1$ en tenant compte des informations précédentes. Unité graphique: 1cm. On précisera également la tangente au point d'abscisse 0. On utilisera $\mathrm{e} \approx 2.7$.

7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Étudier suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = \alpha$. On justifiera soigneusement la réponse.