0. Logique, raisonnements

- Quantificateur universels, existentiels. Règles d'usage
- Implication, équivalence : règles d'usage. Vocabulaire : CN, CS, CNS, ssi....
- Modes de raisonnement : absurde, contraposition, disjonction de cas.

I. Généralités sur les fonctions

- Inégalités dans $\mathbb{R}$. Résolution d'inéquations. Méthodes pratiques pour prouver une inégalité.
- Les bonnes hypothèses pour appliquer une fonction à une égalité/inégalité :

$$a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \leqslant f(b) \qquad a = b \Leftrightarrow f(a) = f(b).$$

- Valeur absolue. Inégalité triangulaire.
- Fonctions usuelles du lycée.
- Composition des fonctions: notation $\circ$.
- Calcul de limites. Opérations sur les limites Composition des limites.

Attention. En ce début d'année rien sur la définition de la limite avec ε.
Limites usuelles du lycée :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \lim_{x\to 0} x\ln x = 0 \quad \lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

- Fonctions monotones. Opérations sur les fonctions monotones.
- Continuité en un point, sur un intervalle. Opérations sur les fonctions continues.
- Dérivabilité en un point, sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables (y compris la composition).
- Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.
- Plan d'étude d'une fonction
- Bijection, théorème de la bijection monotone, théorème de la dérivabilité réciproque.
- Courbe représentative de $x \mapsto f(x+a)$, $x \mapsto f(x)+b$, $x \mapsto f(-x)$, $x \mapsto f(ax)$, $x \mapsto af(x)$.

Questions de cours (preuve à connaître)

- Inégalité triangulaire.
- Inégalité triangulaire renversée :
  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $||x| - |y|| \leqslant |x-y|$.
- Propriété calculatoire de la valeur absolue :
  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| = |x||y|$.
- Propriété calculatoire de la valeur absolue :
  $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|x^n| = |x|^n$.

Exercices extraits du TD et exemples du cours

- Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs : f est majorée, f est bornée, f ne s'annule jamais, f n'est pas la fonction nulle, f est croissante, f ne prend que des valeurs distinctes, f atteint toutes les valeurs de n, f est inférieure à g, f n'est pas inférieure à g.
- Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par contraposition que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.
- Montrer par disjonction de cas, que pour tout entier naturel n l'entier $n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 3.

- Résoudre l'inéquation (E): $\sqrt{2-x} \leqslant \sqrt{x+1}$.
- Résoudre l'inéquation (E): $\ln(x+2) \leqslant \ln(x) + 3$.
- Résoudre (E): $x = \sqrt{x+2}$.
- Résoudre (E): $\ln(x+3) - \ln(x+1) = \ln(2-x)$.
- Résoudre : $|2-4x| = |3x-4|$
- Résoudre : $|3x-4| = |x^2 - x + 3|$
- Résoudre : $\sqrt{|x-1|} \leqslant x - 2$
- Résoudre : $2x = \sqrt{2x^2 - 3x + 2}$
- Résoudre : $x|x-1| = |x|(x-1)$
- Résoudre : $|x| + |x+1| + |x+2| \leqslant 3$.
- Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$.
  En déduire $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad ab + ac + bc \leqslant a^2 + b^2 + c^2$
- Montrer que $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leqslant \sqrt{|a-b|}$
- Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \dfrac{4+x}{4\sqrt{x}} \geqslant 1$
- Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall a \in \mathbb{R}, \ x + \sqrt{a^2 + x^2} \geqslant 0$
- Calculer l'une des limites suivantes:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}, \quad \lim_{x\to 9} \frac{x\sqrt{x} - 27}{x - 9},$$

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{3x+2} - \sqrt{2x-4}), \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2}$$

- Étudier la continuité en 0 de $x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
- Étudier la continuité et la dérivabilité de ces fonctions puis calculer les dérivées de l'une des fonctions d'expression suivante:

$$\mathrm{e}^x \sin(2x)\cos^4(3x+1), \quad \sqrt{x^2 - x + 3}, \quad \sqrt{x^2 + x - 6},$$

$$\frac{\sin x}{\cos x + 1}, \quad \mathrm{e}^{\sqrt{x+3}}, \ln\left|\frac{x}{2-x}\right|$$

- On définit la fonction f par $f(x) = x(1+\sqrt{|x|})$. Déterminer l'ensemble de définition, puis étudier la continuité et la dérivabilité sur l'ensemble de définition.
- Déterminer les réels a et b pour que la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ ax^2+bx+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Etudier la fonction $f : x \mapsto \ln(|x|)$ et en tracer la courbe représentative.
- Etudier la fonction $f : x \mapsto \cos x - \cos^2 x$ et en tracer la courbe représentative.
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin x \leqslant x$.
- Montrer l'existence et l'unicité d'une solution réelle à l'équation $\mathrm{e}^x = 2 - x$. Puis montrer que cette solution appartient à l'intervalle $[0, 1]$.
- On pose $f : x \mapsto \ln(x^2+1)+1$. Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser. Puis donner l'expression de la réciproque.