

Exercice 4. (*) Soit m un paramètre réel. Soit l'équation:

$$(E_m) \quad (m-4)x^2 - 2(m-2)x + m-1 = 0.$$

1) Résoudre en fonction de m l'équation (E_m) .

2) Déterminer la valeur de m pour que l'une des solutions soit égale à 2. Déterminer alors l'autre solution.

Correction -

$$(E_m) \quad (m-4)x^2 - 2(m-2)x + m-1 = 0.$$

- 1) • Si $m = 4$, (E_m) est une équation du premier degré, $(E_4) \Leftrightarrow -4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.
• Si $m \neq 4$, (E_m) est une équation du second degré. Le discriminant de cette équation est:

$$\Delta = (2(m-2))^2 - 4(m-4)(m-1) = 4(m^2 - 4m + 4) - 4(m^2 - 5m + 4) = 4m.$$

Puis on distingue les cas selon le signe du discriminant:

* Si $m > 0$ dans ce cas $\Delta > 0$, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_m) \Leftrightarrow x = \frac{2(m-2) - \sqrt{4m}}{2(m-4)} \text{ ou } x = \frac{2(m-2) + \sqrt{4m}}{2(m-4)} \Leftrightarrow x = \frac{m-2-\sqrt{m}}{m-4} \text{ ou } x = \frac{m-2+\sqrt{m}}{m-4}$$

* Si $m = 0$ dans ce cas $\Delta = 0$, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_m) \Leftrightarrow x = \frac{2(m-2)}{2(m-4)} \Leftrightarrow x = \frac{m-2}{m-4}.$$

* Si $m < 0$ dans ce cas $\Delta < 0$, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_m) \Leftrightarrow x = \frac{2(m-2) - i\sqrt{-4m}}{2(m-4)} \text{ ou } x = \frac{2(m-2) + i\sqrt{-4m}}{2(m-4)} \Leftrightarrow x = \frac{m-2-i\sqrt{-m}}{m-4} \text{ ou } x = \frac{m-2+i\sqrt{-m}}{m-4}.$$

Conclusion : l'ensemble-solution de (E_m) est $\begin{cases} \left\{ \frac{3}{4} \right\} & \text{si } m = 4 \\ \left\{ \frac{m-2-\sqrt{m}}{m-4}, \frac{m-2+\sqrt{m}}{m-4} \right\} & \text{si } m \in]0, 4[\cup]4, +\infty[\\ \left\{ \frac{m-2}{m-4} \right\} & \text{si } m = 0 \\ \left\{ \frac{m-2-i\sqrt{-m}}{m-4}, \frac{m-2+i\sqrt{-m}}{m-4} \right\} & \text{si } m < 0 \end{cases}$.

2)

$$2 \text{ solution de } (E_m) \Leftrightarrow (m-4)^2 - 2(m-2)2 + m-1 = 0 \\ \Leftrightarrow m-9 = 0$$

$$2 \text{ solution de } (E_m) \Leftrightarrow m = 9.$$

L'équation est donc dans ce cas, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_9) \Leftrightarrow 5x^2 - 14x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(5x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = \frac{4}{5}.$$

$$L'ensemble-solution de (E_9) est donc $\left\{ 2, \frac{4}{5} \right\}$.$$

Exercice 5. ()** Déterminer les réels m et p pour que les équations

$$(E_1) \quad x^2 - (m+1)x + m + p = 0 \qquad (E_2) \quad 2x^2 - (m-1)x + 3p = 0.$$

admettent les mêmes solutions.

Correction - $(E_1) \quad x^2 - (m+1)x + m + p = 0$ $(E_2) \quad 2x^2 - (m-1)x + 3p = 0.$

Notons que (E_1) et (E_2) sont des équations du second degré, donc (E_1) et (E_2) ont les mêmes solutions x_1 et x_2 si et seulement si (E_1) et (E_2) s'écrivent sous la forme:

$$(E_1) \quad a(x-x_1)(x-x_2) = 0 \qquad (E_2) \quad a'(x-x_1)(x-x_2) = 0 \qquad \text{où } (a, a') \in \mathbb{R}^2,$$

donc si et seulement si les trinômes intervenant dans les équations sont proportionnels. Par conséquent,

$$(E_1) \text{ et } (E_2) \text{ ont mêmes solutions} \Leftrightarrow (1, -(m+1), m+p) \text{ et } (2, -(m-1), 3p) \text{ proportionnels}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(m-1) = 2 \times (-(m+1)) \\ 3p = 2(m+p) \end{cases} \quad (2 \text{ est le coeff de proportionnalité})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ 2m - p = 0 \end{cases}$$

$$(E_1) \text{ et } (E_2) \text{ ont mêmes solutions} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ p = -6 \end{cases}$$

Exercice 6. (*) Montrer que pour tous réels x et y non nuls

$$2 \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) - 3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 6 \geq 0. \quad \text{Indication : on pourra poser } X = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Correction - Soient x et y deux réels non nuls, on pose $X = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. Notons que $X^2 = \frac{x^2}{y^2} + 2\frac{x}{y}\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2}{y^2} + 2 + \frac{y^2}{x^2}$. On pose alors

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) - 3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 6 = 2(X^2 - 2) - 3X + 6 \\ &= 2X^2 - 3X + 2 \geq 0 \quad (\text{car le discriminant vaut } -7 < 0 \text{ et } 2 > 0). \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé:

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2, \quad \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) - 3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 6 \geq 0.$$

Exercice 7. (**) Déterminer l'ensemble des réels m pour que l'inégalité $mx^2 + 2(m+1)x + 25m + 12 \geq 0$ soit vérifiée pour tout réel x .

Correction - On fait une disjonction de cas selon que la fonction polynomiale est du second degré ou non.

- Si $m = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $mx^2 + 2(m+1)x + 25m + 12 = 2x + 12 = 2(x+6)$. Cette expression est négative pour $x < -6$, donc $m = 0$ ne convient pas.
- Si $m \neq 0$, la fonction polynomiale est du second degré donc, l'inégalité $mx^2 + 2(m+1)x + 25m + 12 \geq 0$ est vérifiée pour tout réel x si et seulement si le discriminant Δ est strictement négatif et $m > 0$. Or

$$\Delta = (2(m+1))^2 - 4m(25m+12) = -96m^2 - 40m + 4 = -4(24m^2 + 10m - 1).$$

On résout alors:

$$\begin{aligned} \Delta < 0 &\Leftrightarrow 24m^2 + 10m - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow m < \frac{-10 - \sqrt{196}}{48} \text{ ou } m > \frac{-10 + \sqrt{196}}{48} \quad (\text{discriminant vaut } 196) \\ &\Leftrightarrow m < -\frac{1}{2} \text{ ou } m > \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

En combinant avec la contrainte $m > 0$, on obtient que l'inégalité est vérifiée si et seulement si $m > \frac{1}{12}$.

- Bilan : l'inégalité $mx^2 + 2(m+1)x + 25m + 12 \geq 0$ est vérifiée pour tout réel x si et seulement si $m > \frac{1}{12}$.

Exercice 13. Contraposition

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par contraposition que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.

Correction - Par contraposition, montrons que si n est impair alors $n^2 - 1$ est divisible par 8. Supposons n impair, posons alors $n = 2k + 1$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1).$$

Or k et $k + 1$ sont deux entiers consécutifs donc l'un des deux est pair donc $k(k + 1)$ est pair donc de la forme $k(k + 1) = 2p$ où $p \in \mathbb{Z}$. Finalement $n^2 - 1 = 8p$ donc est divisible par 8.

On a donc bien prouvé : n impair $\Rightarrow n$ divisible par 8.

Donc par contraposition, si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.

Exercice 14. Disjonction de cas

Montrer que pour tout entier naturel n l'entier $n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 3.

Correction - Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $N = n(n+1)(2n+1)$. Par disjonction de cas :

- si $n = 3k$ où $k \in \mathbb{N}$, $N = 3k(3k+1)(6k+1) = 3 \times k(3k+1)(6k+1)$
- si $n = 3k + 1$ où $k \in \mathbb{N}$, $N = (3k+1)(3k+2)(6k+3) = 3 \times (3k+1)(3k+1)(2k+1)$
- si $n = 3k + 2$ où $k \in \mathbb{N}$, $N = (3k+2)(3k+3)(6k+5) = 3 \times (3k+2)(k+1)(6k+5)$.

Donc dans tous les cas, N est un multiple de 3.