Pour différencier les exercices selon les difficultés, ils sont étiquetés par les symboles : $(\heartsuit)$, $(*)$, $(**)$, $(***)$.

- $(\heartsuit)$: pour un un exercice très proche du cours qui ne nécessite pas trop de recherche, de calcul, de prise d'initiative.
- $(*)$: pour un exercice qui demande davantage de calculs, de réflexion sans pour autant être difficile.
- $(**)$: pour un exercice un peu plus difficile qui demandera davantage de prises d'initiative, davantage de calculs. Un exercice où l'on n'a pas forcément tout de suite l'idée qui marche et qui demandera donc peut-être plusieurs essais.
- $(***)$: pour un exercice beaucoup plus difficile.

Sommes simples, produits simples

Exercice 1. $(\heartsuit)$Les démonstrations du cours non traitées (ne sera pas corrigé en TD)
Prouver:

1) la formule donnant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$ (par récurrence)
2) la formule donnant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ (par récurrence et par téléscopage)

Exercice 2. $(\heartsuit)$ Pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes:

1) -a- $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{2k}$

-b- $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} 2^{-3k}$

-c- $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^{3k-1}3^{k+2}$

-d- $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{5^{2k+1}}{3^{3k-2}}$

-e- $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k 2^{n-k}$

-f- $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} 2^{3k}3^{n-2k}$

2) -a- $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+2)$

-b- $\displaystyle\sum_{k=3}^{15} \frac{3k-1}{2}$

-c- $S_n = 1+3+5+7+\cdots+\cdots 2n+1$

-d- $S_n = n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots+(n-1)2+n$

3) -a- $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \min(k,n)$

-b- $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k(2k+1)$

-c- $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2$

4) -a- $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

-b- $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k}\right)$

-c- $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ [Écrire $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k}$ où a et b réels à déterminer]

-d- $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ [$k = (k+1) - 1$]]

-e- $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ [$k = (k+1) - 1$]]

Exercice 3. $(\heartsuit)$ Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$. [On pourra faire apparaître un téléscopage...]

Exercice 4. $(*)$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.
2) En déduire la valeur de la somme S_n.

Exercice 5. $(*)$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$.
A l'aide du changement d'indice $j = k - 1$, calculer S_n. [On cherchera à retrouver S_n dans l'expression de S_n obtenue...]

Exercice 6. $(**)$ Soit $n \geqslant 2$ et $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $x_{n+1} = x_1$. Montrer que:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+1}.$$

Exercice 7. $(**)$ Soit $a \in]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{(1-a^k)(1-a^{k+1})}$ que l'on souhaite calculer.
En calculant $(1 - a)S_n$ faire apparaître une somme téléscopique.

Factorielles, coefficients binomiaux, formules du binôme

Exercice 8. $(\heartsuit)$ Simplifier les expressions suivantes:

$$A_n = \frac{(n+3)!}{(n-1)!} \qquad B_n = \frac{(n-2)!}{n!} - \frac{n!}{(n+2)!} \qquad C_n = (n+1)! - n! \qquad D_n = \frac{n!}{p!} - \frac{(n-1)!}{(p+1)!}.$$

Exercice 9. $(\heartsuit)$ Exprimer à l'aide de factorielles

$$A_n = n(n-1)(n-2) \qquad B_n = 2n(2n-2)(2n-4)\cdots 4 \times 2 \qquad C_n = \prod_{i=1}^{n}(2i-1).$$

Exercice 10. $(\heartsuit)$ Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k! \leqslant (n+1)!$.

Exercice 11. $(*)$ Montrer, par récurrence, que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2n+1}$.

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

1) $(\heartsuit)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ 2)$(\heartsuit)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k} 2^{2n-k}$ 3)$(*)$ $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ 4)$(*)$ $\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$.

5) $(*)\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$. En déduire $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$ 6) $(**)$ $\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$ et $\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$

Exercice 13. $(*)$ Autre méthode
Soit $n \in \mathbb{N}$. Á l'aide de la fonction $x \mapsto (1+x)^n$ (dériver ou intégrer), calculer les sommes

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ 2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$ 3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

Exercice 14. $(*)$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

1) En effectuant le changement d'indice $j = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n.
2) En déduire la valeur de $2S_n$, puis celle de S_n.

Exercice 15. $(**)$ Soient n, p, q des entiers naturels tels que $n \leqslant p+q$.
En développant de deux manières différentes $(1+x)^p(1+x)^q$ calculer la somme : $S_n(p,q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$.
Rappel : l'égalité de deux fonctions polynomiales entraine l'égalité des coefficients.

Exercice 16. $(**)$ Soient k, p et n entiers naturels vérifiant $p \leqslant k \leqslant n$.

1) Montrer que $\displaystyle\binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \binom{n}{k}\binom{k}{p}$.
2) En déduire la valeur des sommes:

$$S = \sum_{p=0}^{k} \binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} \qquad T = \sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p}.$$

Sommes doubles

Exercice 17. $(\heartsuit)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes:

1) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i$
2) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i$
3) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+1)^2$
4) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (i+j)$
5) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (ij)$
6) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$

Exercice 18. $(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes:

1) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$
2) $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{i}{j}$

Exercice 19. $(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} 2^k\right)$. En déduire alors le calcul de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$.

Systèmes

Exercice 20. ($\heartsuit$) Résoudre les systèmes:

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & -1 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 5 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & + & 4y & + & z & = & -1 \end{array}\right. \qquad (S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & + & 4y & + & z & = & 4 \end{array}\right.$$

$$(S_4)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & t & = & 1 \\ x & + & y & - & z & - & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ x & - & y & - & z & + & t & = & 2 \end{array}\right. \qquad (S_5)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & 4y & + & z & + & 2t & = & 3 \\ 6x & + & 8y & + & 2z & + & 5t & = & 7 \\ 9x & + & 12y & + & 3z & + & 10t & = & 13 \end{array}\right.$$

$$(S_6)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & + & t & = & -2 \\ 2x & - & y & - & z & - & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 2 \end{array}\right.$$

Exercice 21. ($*$) Résoudre en fonction du paramètre réel m les systèmes:

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & m \\ 2x & + & 3y & + & z & = & m+3 \\ 4x & + & 7y & - & 5z & = & 2m+5 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcr} mx & + & y & = & 1 \\ x & + & my & = & 1 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & mz & = & m \\ x & + & my & - & z & = & -1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} mx & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & my & + & z & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & mz & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & z & + & mt & = & -1 \end{array}\right.$$

Exercice 22. ($**$) Résoudre le système d'inconnue $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $\begin{cases} x_1 + x_2 & = 2a_1 \\ x_2 + x_3 & = 2a_2 \\ \quad\vdots & \\ x_{n-1} + x_n & = 2a_{n-1} \\ x_n + x_1 & = 2a_n \end{cases}$.