Exercice 5. $(*)$

1) Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x+y)^2\geqslant 4xy$.
2) En déduire que pour tout $(a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$, $(a+b)(c+a)(a+b)\geqslant 8abc$.
3) En déduire que $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$.

Correction -

1) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x+y)^2-4xy=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\geqslant 0$. Donc $\boxed{(x+y)^2\geqslant 4xy}$.
2) Soit $(a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$, on fait le produit des trois inégalités découlant de 1) où tous les membres sont positifs,

$$(a+b)^2\geqslant 4ab \qquad (a+c)^2\geqslant 4ac \qquad (b+c)^2\geqslant 4bc.$$

On obtient,

$$(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2\geqslant 4^3a^2b^2c^2.$$

On applique $\sqrt{\ }$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, de plus $(a+b)(a+c)(b+c)\geqslant 0$ et $8abc\geqslant 0$, on obtient alors :

$$\boxed{(a+b)(c+a)(a+b)\geqslant 8abc}.$$

3)

$$\begin{aligned}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)&=\frac{(a+b+c)(ab+ac+bc)}{abc}=\frac{a^2b+ab^2+ac^2+a^2c+b^2c+bc^2+3abc}{abc}=\frac{(a+b)(a+c)(b+c)+abc}{abc}\\&\geqslant\frac{8abc+abc}{abc}\qquad\text{(d'après 2))}\end{aligned}$$

$$\boxed{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9}$$

Exercice 6. $(*)$

1) Montrer que pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $1\leqslant|1+x|+|x+y|+|y+z|+|z|$. *[Écrire $1=1+x-(.....)$].*
2) Montrer que pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x|+|y|\leqslant|x-y|+|x+y|$. *[On distinguera les cas $|x|\leqslant|y|$ puis $|x|\geqslant|y|$].*

Correction -

2) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
   - Si $|x|\leqslant|y|$,

   $$|x|+|y|\leqslant|y|+|y|=|2y|=|y+x+y-x|\overset{IT}{\leqslant}|y+x|+|y-x|=|x+y|+|x-y|.$$

   - Si $|y|\leqslant|x|$,

   $$|x|+|y|\leqslant|x|+|x|=|2x|=|x+y+x-y|\overset{IT}{\leqslant}|x+y|+|x-y|=|x+y|+|x-y|.$$

   Dans tous les cas, $\boxed{|x|+|y|\leqslant|x-y|+|x+y|.}$

Exercice 8 Déterminer l'ensemble de définition, étudier la continuité et la dérivabilité de ces fonctions puis calculer les dérivées des fonctions f d'expression (on s'arrangera évidemment pour avoir une expression la plus factorisée possible):

6) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+1}$ 7) $\dfrac{1}{\ln(x^2+x+1)}$ 8) $f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x+3}}$ 9) $f(x)=x\sqrt{\dfrac{2}{x+1}}$

Correction -

6) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+1}$. f est définie sur $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$.
   - $x\mapsto\sin x$ est continue, dérivable sur $\mathcal{D}_f$

- $x \mapsto \cos x + 1$ est continue, dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme somme de $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto 1$ qui le sont.
- Par quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, $\boxed{f \text{ est continue, dérivable sur } \mathcal{D}_f}$.

Pour $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = \frac{\cos x(\cos x + 1) - \sin x \times (-\cos x)}{(\cos x + 1)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \cos x}{(\cos x + 1)^2} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{1}{1 + \cos x}}.$$

7) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x^2 + x + 1)}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x^2 + x + 1 > 0 \text{ et } \ln(x^2 + x + 1) \neq 0.$$

Or, le discriminant du trinôme $x^2 + x + 1$ vaut $-3 < 0$, donc: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$. Donc

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x^2 + x + 1 \neq 1 \Leftrightarrow x^2 + x \neq 0 \Leftrightarrow x(x+1) \neq 0. \qquad \text{Donc } \boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}}.$$

- $x \mapsto x^2 + x + 1$ continue sur $\mathcal{D}_f$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$
- $x \mapsto \ln(x)$ continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$
- $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$

donc par composition $\boxed{f \text{ est continue et dérivable sur } \mathcal{D}_f}$.
Soit $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = -\frac{\frac{2x+1}{x^2+x+1}}{(\ln(x^2 + x + 1))^2} \qquad \boxed{f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2 + x + 1)(\ln(x^2 + x + 1))^2}}.$$

8) $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x+3}}$. f est définie sur $[-3, +\infty[$.

- $x \mapsto x + 3$ est continue sur $[-3, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $]-3, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors par composition, $\boxed{f \text{ est continue sur } [-3, +\infty[\text{ et dérivable sur }]-3, +\infty[}$.

$\boxed{\text{Soit } x \in]-3, +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} \mathrm{e}^{\sqrt{x+3}}}$.

9) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{2}{x+1}}$. Notons $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \frac{2}{x+1} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]-1, +\infty[. \quad \boxed{\text{Donc } f \text{ est définie sur }]-1, +\infty[}.$$

- $x \mapsto \dfrac{2}{x+1}$ est continue et dérivable sur $]-1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors, par composition, $x \mapsto \sqrt{\dfrac{2}{x+1}}$ est continue et dérivable sur $]-1, +\infty[$.
Puis par produit avec $x \mapsto x$ qui est continue et dérivable sur $]-1, +\infty[$, alors $\boxed{f \text{ est continue et dérivable sur }]-1, +\infty[}$.
Soit $x \in]-1, +\infty[$,

$$f'(x) = \sqrt{\frac{2}{x+1}} + x \times \frac{\frac{-2}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{2}{x+1}}} = \frac{\left(\sqrt{\frac{2}{x+1}}\right)^2 - \frac{x}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{2}{x+1}}} = \frac{\frac{4}{x+1} - \frac{x}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{2}{x+1}}} = \frac{\frac{4(x+1)-x}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{2}{x+1}}} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{\frac{3x+4}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{2}{x+1}}}}$$

Exercice 12. $(*)$ On pose f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2) Montrer que la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0.

Correction -

1) Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$0 \geqslant |f(x)| = |x^2 \sin(\frac{1}{x})| = x^2 |\sin(\frac{1}{x})| \leqslant x^2.$$

Or $0 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ et $x^2 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $|f(x)| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow}$.
Donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } f(0) = 0}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}^*$,
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin(\frac{1}{x}) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(théorème des gendarmes comme ci-dessous).}$$
Donc, $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 avec } f'(0)=0}$.

Exercice 16 Soit f la fonction d'expression $f(x) = \dfrac{x^2-x-1}{x+1}$.

1) Effectuer l'étude classique de cette fonction sans effectuer le tracé de la courbe représentative de f.
2) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x dans l'ensemble de définition de f, $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+1}$.
En déduire que la droite Δ d'équation $y = ax+b$ est asymptote à la courbe.
3) Étudier la position de Δ par rapport à $\mathcal{C}_f$.
4) Tracer la droite Δ puis la courbe $\mathcal{C}_f$.

Correction - Soit f la fonction d'expression $f(x) = \dfrac{x^2-x-1}{x+1}$.

1) *Pour cette question les détails sont laissés au lecteur*
Comme fonction fraction rationnelle, f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$. Donc f est du signe de $x(x+2)$ qui obéit à la règle du signe du trinôme.
On montre que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2) Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$,
$$ax+b+\frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{(x+1)}.$$
Par identification à $f(x)$, on pose le système:
$$\begin{cases} a=1 \\ a+b=-1 \\ b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=1 \end{cases}.$$
Donc: $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}, \quad f(x) = x-2+\frac{1}{x+1}.}$
Puis, $(f(x)-(x-2)) = \dfrac{1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ d'équation } y=x-2 \text{ est asymptote à la courbe}}$.
3) Pour $x \neq -1$,
$$(f(x)-(x-2)) = \frac{1}{x+1}\begin{cases} >0 & \text{si } x>-1 \\ <0 & \text{si } x<-1 \end{cases}.$$
Donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } \Delta \text{ sur }]-1,+\infty[\text{ et au-dessous de } \Delta \text{ sur }]-\infty,1[}$.
4) Tracer la droite Δ puis la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 18. $(**)$ Montrer que: $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n-1)a^n + b^n \geqslant na^{n-1}b.$
(On pourra d'abord se ramener à une inégalité plus simple en divisant par b^n).

Correction - Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Après division par b^n, l'inégalité à prouver est équivalente à
$$(n-1)\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1 \geqslant n\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} \qquad (*).$$
On pose pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t) = (n-1)t^n + 1 - nt^{n-1}$.
On étudie les variations de la fonction f pour prouver que f décroissante sur $[0,1]$ puis croissante sur $[1,+\infty[$. Elle admet donc un minimum en 1, $f(1)=0$. Donc f est positive. *Tous les calculs sont laissés au lecteur*
Puis on utilise $f(t) \geqslant 0$ avec $t = \dfrac{a}{b}$ qui donne immédiatement $(*)$ puis l'inégalité voulue.

Exercice 22. $(*)$ On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2}$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x. \qquad \text{[Commencer par la seconde inégalité]}$$

2) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Correction - On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2}$.

1) **Quelques indications**. On pose les fonctions $f : x \mapsto x - \sin x$ et $g : x \mapsto \sin x - x + \frac{x^3}{6}$.
Grâce à une étude des variations de f et g sur $\mathbb{R}_+$ on montre que ces deux fonctions sont positives.
On montre que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $f(0) = 0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}_+$.
On montre que g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $g(0) = 0$ donc g est positive sur $\mathbb{R}_+$. On est amené à étudier les variations de g' via g'' pour étudier le signe de g'.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![1, n]\!]$, on prend $x = \frac{k}{n^2}$ dans 1), pour obtenir
$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \leqslant \sin \frac{k}{n^2} \leqslant \frac{k}{n^2}.$$
On somme pour $k \in [\![1, n]\!]$,
$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k.$$
Puis :
$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{6n^6}\frac{n^2(n+1)^2}{4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \quad \text{(détails laissés)}$$
$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \quad \text{(détails laissés).}$$
Donc d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}}$.

Exercice 24. (♡) Montrer que l'équation (E) $\ln(x) - 3 + x = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction - Archi-classique. On applique scrupuleusement (modèle de rédaction du cours) le théorème de la bijection monotone à la fonction $f : x \mapsto \ln(x) - 3 + x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 25. $(*)$ Montrer que l'équation (E) $x^3 + 3x^2 - 9x + 4 = 0$ admet exactement trois solutions sur $\mathbb{R}$.

Correction - Classique. On applique trois fois scrupuleusement (modèle de rédaction du cours) le théorème de la bijection monotone à la fonction $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 9x + 4$ sur chaque intervalle où la fonction est strictement monotone.

Exercice 26. $(**)$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $x - \ln x = n$.

1) Soit $n \geqslant 2$ *(il faut prendre $n \geqslant 2$)*. Prouver que cette équation admet une unique solution $x_n > 1$.
2) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
3) Montrer que $\dfrac{x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Correction - Soit $n \geqslant 2$., on pose $f : x \mapsto x - \ln x$.

1) On applique le TBM à la fonction f sur $]1, +\infty[$ pour prouver que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ vers $]1, +\infty[$ ([....] détails laissés).
Or $n \in]1, +\infty[$ donc n admet un unique antécédent par f noté $x_n \in]1, +\infty[$. Donc, $\boxed{\text{l' équation admet une unique solution } x_n > 1}$.
2) On calcule $f(n) = n - \ln n < n = f(x_n)$. Or f est strictement croissante sur $[1, +\infty]$, donc $n < x_n$. Or $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par minoration $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.
3) En calculant $f(2n) = 2n - \ln(2n) = n + n - \ln(n) - \ln 2 > n = f(x_n)$ on déduit que $x_n < 2n$. Finalement, $n < x_n < 2n$.
Par définition de x_n, $x_n - \ln(x_n) = n$ donc $\dfrac{x_n}{n} - \dfrac{\ln(x_n)}{n} = 1$ donc $\dfrac{x_n}{n} = \dfrac{\ln(x_n)}{n} + 1$
Or $n < x_n < 2n$ donc par croissance de ln, $\ln(n) < \ln(x_n) < \ln(2n)$ donc $\dfrac{\ln(n)}{n} < \dfrac{\ln(x_n)}{n} < \dfrac{\ln(2n)}{n}$, on applique le théorème des gendarmes pour prouver alors $\dfrac{\ln(x_n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (les membres de gauche et droite tendent vers 0 par croissances comparées).
Donc, par somme $\boxed{\dfrac{x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$.
Rem : on pouvait aussi diviser la relation $n = x - \ln(x_n)$ par x_n et utiliser $\frac{\ln x_n}{x_n} \to 1$ car $x_n \to +\infty$ et par croissances comparées $\frac{\ln x}{x} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.