Exercice 1 Pour n entier naturel non nul, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{nx}}$. On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n.

1) $\boxed{f_n \text{ est définie sur } \mathbb{R}^*}$.

- $x \mapsto nx$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$
- $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$

Par composition, $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{nx}}$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Puis par produit par $x \mapsto x$, continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, $\boxed{f_n \text{ est continue et dérivable sur } \mathbb{R}^*}$.

2) **Limite en** $\pm\infty$.
$-\frac{1}{nx} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ alors par composition $\mathrm{e}^{-\frac{1}{nx}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Puis par produit par $x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il vient $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty}$.

De même, on montre que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty}$.

3) **En** 0_+.
$-\frac{1}{nx} \underset{x\to 0_+}{\longrightarrow} -\infty$ et $\mathrm{e}^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ alors par composition $\mathrm{e}^{-\frac{1}{nx}} \underset{x\to 0_+}{\longrightarrow} 0$. Puis par produit par $x \underset{x\to 0_+}{\longrightarrow} 0_+$, il vient $\boxed{\lim\limits_{x\to 0_+} f_n(x) = 0 = f(0)}$. Donc, $\boxed{f_n \text{ est continue à droite en } 0}$.
Puis, pour $x > 0$

$$\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{nx}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(par opérations)}.$$

Donc $\boxed{f_n \text{ est dérivable à droite en } 0 \text{ avec } f'_{n,d}(0) = 0}$. **En** 0_-.

Pour $x < 0$, $f_n(x) = -\dfrac{1}{n}\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{nx}}}{\frac{-1}{nx}}$ (on a réarrangé f_n pour faire apparaitre une limite usuelle, $\dfrac{\mathrm{e}^u}{u}$ en $+\infty$).

Puis $-\frac{1}{nx} \underset{x\to 0_-}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{\mathrm{e}^x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors par composition $\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{nx}}}{\frac{-1}{nx}} \underset{x\to 0_-}{\longrightarrow} +\infty$. Puis par produit, par $-\frac{1}{n}$, il vient $\boxed{\lim\limits_{x\to 0_-} f_n(x) = -\infty}$.

4) Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

	0		$-\frac{1}{n}$		0		$+\infty$
f'_n	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
f_n	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\mathrm{e}}{n}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ 0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{nx}} + x \times \left(-\frac{-1}{nx^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{nx}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{nx}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{nx}} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'_n(x) = \frac{nx+1}{nx}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{nx}}}.$$

Comme exp est positive, la dérivée est du signe de $\frac{nx+1}{nx}$.
D'où les variations de f_n.

5) On pose la fonction φ définie par $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-t} - (1-t) - \frac{t^2}{2}$.

t	0	$+\infty$
φ''		$-$
φ'	0	$-$
φ	0	$\searrow$

-a- Soit $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\varphi'(t) = -\mathrm{e}^{-t} + 1 - t \qquad \varphi''(t) = \mathrm{e}^{-t} - 1.$$

Donc:

$$\varphi''(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-t} \geqslant 1 \Leftrightarrow -t \geqslant 0 \Leftrightarrow t \leqslant 0.$$

D'où le tableau.

-b- D'après l'étude précédente, sur $\mathbb{R}_+$:

- φ' admet un maximum en 0 qui vaut $\varphi'(0) = 0$. Donc: $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(t) \leqslant 0$ c'est-à-dire, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^{-t} - (1-t) \geqslant 0$.
- φ admet un maximum en 0 qui vaut $\varphi(0) = 0$. Donc: $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(t) \leqslant 0$ c'est-à-dire, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^{-t} - (1-t) \leqslant \frac{t^2}{2}$.

On a donc bien: $\boxed{\forall t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - (1-t) \leqslant \frac{t^2}{2}.}$

-c- Soit $x>0$, on prend $t=\frac{1}{nx}$ dans 5)-b-. Il vient,

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{nx}} - (1-\frac{1}{nx}) \leqslant \frac{1}{2n^2x^2}.$$

D'où en multipliant par $x>0$,

$$0 \leqslant x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{nx}} - (x-\frac{1}{n}) \leqslant \frac{1}{2n^2x}.$$

C'est à dire:

$$\boxed{0 \leqslant f_n(x) - \left(x-\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{2n^2x}}.$$

Notons que $\frac{1}{2n^2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par théorème d'encadrement: $f_n(x) - \left(x-\frac{1}{n}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que la droite Δ_n d'équation $y = x - \frac{1}{n}$ est asymptote à $\mathcal{C}_n$ au voisinage de $+\infty$.

Puis comme, pour tout $x>0$, $0 \leqslant f_n(x) - \left(x-\frac{1}{n}\right)$ on en déduit que $\boxed{\mathcal{C}_n \text{ est au-dessus de } \Delta_n \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.

6) Tracé de $\mathcal{C}_1$.

7)
- f_n est strictement croissante et continue sur l'intervalle $]-\infty,-\frac{1}{n}[$ donc d'après le théorème de la bijection monotone, f_n réalise une bijection de $]-\infty,-\frac{1}{n}[$ vers $f(]-\infty,-\frac{1}{n}[) =]-\infty,-\frac{\mathrm{e}}{n}[$.
- De même, f_n réalise une bijection de $]-\frac{1}{n},0[$ vers $f(]-\frac{1}{n},0[) =]-\infty,-\frac{\mathrm{e}}{n}[$.
- De même, f_n réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers $f([0,+\infty[) = [0,+\infty[$.

Par conséquent,

- si $\alpha \in]-\infty,-\frac{\mathrm{e}}{n}[$, l'équation $f_n(x)=\alpha$ admet 2 solutions
- si $\alpha \in]-\frac{\mathrm{e}}{n},0[$, l'équation $f_n(x)=\alpha$ n'admet pas de solution
- si $\alpha \in]0,+\infty[$ ou si $\alpha = -\frac{\mathrm{e}}{n}$, l'équation $f_n(x)=\alpha$ admet une unique solution.