I. Généralités sur les fonctions

- Bijection, théorème de la bijection monotone, théorème de la dérivabilité réciproque.

II. Calculs algébriques

- Sommes et produits: $\sum_{i\in I} a_i$, $\prod_{i\in I} a_i$. Linéarité de la somme et propriétés similaires pour le produit.
- Sommes classiques à connaître:
$$\sum_{k=0}^{n} k \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 \quad \sum_{k=m}^{n} a \quad \sum_{k=m}^{n} (a+kb) \quad \sum_{k=m}^{n} q^k.$$
- Factorisation de $a^n - b^n$ et $a^n + b^n$ dans le cas n impair.
- Techniques de calculs de sommes: changement d'indice, téléscopage, regroupement de termes.
- Factorielle, définition de $\binom{n}{p}$ à l'aide des factorielles.
- Formules: $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ $\quad \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$
$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ (triangle de Pascal)
- Formule du binôme de Newton et application au calcul de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$.
- Sommes doubles. Sommes sur un rectangle, un triangle et décomposition d'une somme double en deux sommes simples.
- Système linéaire de n équations à p inconnues: coefficients, inconnues (ou p-uplet inconnu), second membre. Système linéaire homogène associé. Système compatible, incompatible.
- Opérations élémentaires: $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \alpha L_i$, $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$. Réversibilité des opérations. Équivalence de systèmes, notation $(S) \Leftrightarrow (S')$. Deux systèmes équivalents ont même ensemble de solutions.
- Systèmes triangulaires. Existence et unicité de la solution ssi les coef diagonaux sont non nuls. Méthode de remontée pour la résolution.
- Système échelonné par lignes, pivot. Inconnues principales, inconnues secondaires ou paramètres. Équations principales, équations de compatibilité.
- Algorithme du pivot de Gauss pour échélonner un système.
- Structure des ensembles solutions: l'ensemble solution d'un système homogène contient $(0,\dots,0)$ et et stable par combinaisons linéaires. L'ensemble solution de $\mathcal{S}$ s'obtient en ajoutant à une solution particulière, les solutions de l'équation homogène.

Questions de cours (preuve à connaître)

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ par trois méthodes (changement d'indice, téléscopage, récurrence)
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ par deux méthodes (téléscopage, récurrence)
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k$
- Factorisation de $a^n - b^n$.
- $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.
- Formule du binôme.
- Trois méthodes pour calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$.

Exercices extraits du TD et exemples du cours

- Etudier la fonction $f : x \mapsto \cos x - \cos^2 x$ et en tracer la courbe représentative.
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ réalise une bijection de son ensemble de définition, que l'on déterminera, vers un intervalle à préciser. On donnera l'expression de $f^{-1}(y)$.
- Montrer que l'équation (E) $x^3 + 3x^2 - 9x + 4 = 0$ admet exactement trois solutions sur $\mathbb{R}$.
- On a calculé toutes ces sommes-là (pour n correctement choisi) :
$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{3k-1}3^{k+2}$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{5^{2k+1}}{3^{3k-2}}$, $\sum_{k=2}^{n} 2^{3k}3^{n-2k}$, $\sum_{k=0}^{n} k(k+2)$, $1+3+5+7+\cdots+\cdots 2n+1$, $S_n = n + 2(n-1) + 3(n-2) + \cdots + (n-1)2 + n$,
$\sum_{k=1}^{2n} |k-n|$, $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k.$, $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1)$, $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k}\right)$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k 3^{2n-3k}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k} 2^{2n-k}$,
$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$, $\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$ et $\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$, $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$, $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$.
- Résoudre les systèmes $\left\{\begin{array}{lllll} x & -3y & +7z & = & 0 \\ x & +2y & -3z & = & 0 \\ 7x & +4y & -z & = & 1 \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{lllll} x & -3y & +7z & = & 1 \\ x & +2y & -3z & = & 0 \\ 7x & +4y & -z & = & 2 \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{lllll} x & +2y & -3z & = & 4 \\ x & +3y & +z & = & 11 \\ 2x & +5y & -4z & = & 13 \\ 4x & +11y & & = & 37 \end{array}\right.$.
- Résoudre en fonction du paramètre réel m le système $\left\{\begin{array}{lllll} mx & +y & +z & = & 0 \\ x & +my & +z & = & 0 \\ x & +y & +mz & = & 0 \end{array}\right.$.