Chapitre Fonctions usuelles (1ère partie)

I Quelques fonctions élémentaires

Théorème-Définition (Fonction polynomiale)

- Soient $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ où $n \in \mathbb{N}$. On appelle **fonction polynomiale** toute fonction d'expression $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Toute fonction polynomiale est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple La fonction $x \mapsto 3x^4 - 2x^2 + 5x + 2$ est une fonction polynomiale. Elle est définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème-Définition (Fonction fraction rationnelle)

- On appelle **fonction fraction rationnelle** ou **fonction rationnelle** toute fonction d'expression $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des fonctions polynomiales.
- Toute fonction fraction rationnelle est définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\{x \in \mathbb{R} \,/\, Q(x) \neq 0\}$.

Exemple La fonction $x \mapsto \dfrac{x^3 + 2x^2 + 5}{x^2 - 3x + 2}$ est une fonction fraction rationnelle. Elle est définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$.

Théorème-Définition (Valeur absolue)

- On définit la fonction valeur absolue par $\begin{array}{rccl} |\cdot| : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \end{array}$.
- La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

II Fonction logarithme népérien

Définition (Logarithme népérien)

On appelle **logarithme népérien**, noté ln, la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, qui s'annule en 1.

Remarques (Conséquences immédiates)

- $\ln 1 = 0$
- ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Théorème (Propriétés de $\ln$)

1) **Propriétés calculatoires** $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \qquad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \ln(a^n) = n \ln a.$$

2) **Limites usuelles** $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

3) **Inégalités classiques** $\forall x > 0, \qquad \ln(x) \leqslant x - 1 \quad$ ou $\quad \forall x > -1, \qquad \ln(1+x) \leqslant x$

Théorème (Dérivée de $x \mapsto \ln(|u(x)|)$)

Soit $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$. Alors $\varphi : x \mapsto \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I avec:

$$\forall x \in I, \ \ \varphi'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Remarques (Logarithme de base 10 : utile en chimie, en SI)

On appelle **logarithme de base** 10 et on note $\log_{10}$ ou $\log$ l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ \log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

$\log_{10}(x)$ est appelé logarithme de base 10 de x.
Le logarithme décimal possède les mêmes propriétés que le ln. Pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\log_{10}(ab) = \log_{10}(a) + \log_{10}(b) \qquad\qquad \log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) = \log_{10}(a) - \log_{10}(b).$$

Remarques (Logarithme de base 2 : utile en info)

On appelle **logarithme de base** 2 et on note $\log_2$ l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ \log_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}.$$

III Fonction exponentielle

Théorème-Définition (Fonction exponentielle)

L'application $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective, la bijection réciproque est appelée **exponentielle** notée $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.

Théorème (Propriétés de exp)

1) **Dérivabilité.** La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est dérivable avec: $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x).$

2) **Propriétés calculatoires** $\quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b), \qquad \exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}.$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \exp(na) = \exp(a)^n.$$

3) **Limites usuelles** $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0^+$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1.$$

4) **Inégalité classique** $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(x) \geqslant x+1.$

☞ **Explication** ☜ La propriété 2) du théorème précédent justifie de noter la fonction exponentielle sous la forme puissance $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ où $\mathrm{e} = \exp(1)$.

IV Fonctions puissances

Définition

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle **fonction puissance** d'exposant α l'application $p_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)} \end{array}.$

☞ **Explication** ☜ Sur les valeurs de α. Pour pouvoir définir la fonction pour toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, il est nécessaire d'imposer $x \in \mathbb{R}_+^*$. Cependant pour certaines de valeurs de α, on peut agrandir l'ensemble de définition:

- si $\alpha > 0$, $x \mapsto x^\alpha$ est prolongeable par continuité en 0, et vaut 0 en 0, donc $x \mapsto x^\alpha$ est prolongée à $\mathbb{R}^+$
- si $\alpha = 0$, $x \mapsto x^\alpha$ est constante égale à 1 et est définie en 0 égale à 1,
- si $\alpha \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^\alpha = x \times \cdots \times x$ est définie sur $\mathbb{R}$ (vérifier la cohérence des deux définitions)
- si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$, $x \mapsto x^\alpha = \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$ $(-\alpha \in \mathbb{N})$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ (vérifier la cohérence des deux définitions).

Propriétés (Règles de calculs)

1) $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*, \quad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$
2) $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
3) $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*, \quad \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$.

Théorème (Dérivée de la fonction puissance)

La fonction puissance est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée:

$$\forall\alpha\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Remarques (Expression de la forme $u(x)^{v(x)}$)

C'est un **réflexe**, quand on a affaire à une expression de fonction de forme $u(x)^{v(x)}$, on commence par passer à l'écriture exponentielle, $u(x)^{v(x)} = \mathrm{e}^{v(x)\ln(u(x))}$ ce qui donne les premières contraintes vérifiées par x, à savoir $u(x) > 0$.

Exercice. Calculer les deux limites $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ et $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f d'expression $f(x) = x^x$. Puis étudier sa dérivabilité et calculer sa dérivée.

Exercice. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$.

V Croissances comparées

Théorème (Croissances comparées élémentaires)

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ 2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$

Remarques (Négligeabilité)

On dit que $\ln x$ est négligeable devant x au voisinage de $+\infty$, ou que x est prépondérant sur $\ln x$, et que x est négligeable devant e^x au voisinage de $+\infty$, ou que e^x est prépondérant sur x.

Exercice. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x}$.

Théorème (Croissances comparées générales)

1) Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$

2) Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0$

3) Soient $\gamma > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\gamma x}}{x^\alpha} = +\infty$

4) Soient $\gamma > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\gamma x}\, |x|^\alpha = 0$.

Remarques (Négligeabilité)

On dit que $(\ln(x))^\alpha$ est négligeable devant x^β au voisinage de $+\infty$, et que x^β est négligeable devant $\mathrm{e}^{\gamma x}$ au voisnage de $+\infty$.

Exercice - Calculer les limites suivantes:

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^2+x}\ln x$

3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln(x))^3\, \mathrm{e}^{-x}\, x^6$

4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{5x}}{x^2}$.