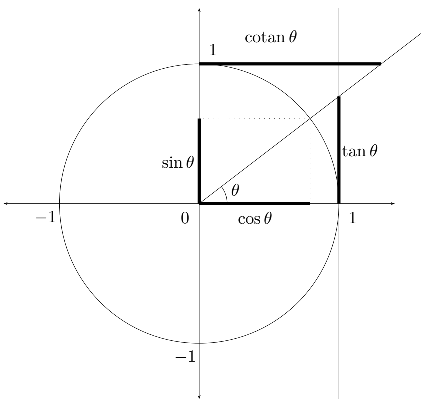
Chapitre
Nombres complexes

I Rappels et compléments sur la trigonométrie

I.1 Le formulaire

Cercle trigonométrique



Formules élémentaires

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Ces formules sont valables lorsque leurs éléments sont définis

Formules "qui se voient"

$\cos(-x) = \cos x$ | $\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$ | $\sin(\pi - x) = \sin x$
$\tan(-x) = -\tan x$ | $\tan(\pi - x) = -\tan x$
$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$ | $\cos(x + \pi) = -\cos x$
$\sin(\pi/2 - x) = \cos x$ | $\sin(x + \pi) = -\sin x$
$\cos(x + \pi/2) = -\sin x$ | $\tan(x + \pi) = \tan x$
$\sin(x + \pi/2) = \cos x$

Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Formules de duplication

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Formules de linéarisation

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Transformation sommes en produits

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

Transformation produits en sommes

$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$
$$\sin a \sin b = \tfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$
$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$$

Angles remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

☞ **Explication** ☜

- **formules qui se voient** : se lisent sur le cercle trigonométrique (conseil, placer x dans le premier quadrant)
- **formules élémentaires** : $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$ est une conséquence du théorème de Pythagore
- **formules de duplication** : se retrouvent à l'aide des formules d'addition

- **formules de linéarisation** : se retrouvent à l'aide des formules de duplication
- **formules de transformation de produit en sommes** : se retrouvent en soustrayant/additionnant les formules d'addition
- **formule de transformation de somme en produit** : on écrit $p = \alpha + \beta$ et $q = \alpha - \beta$ où $\alpha = \frac{p+q}{2}$ et $q = \frac{p-q}{2}$, puis on utilise les formules d'addition.

Théorème (Transformation de $a\cos x + b\sin x$)

Soient a, b deux réels. Il existe un réel φ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)}.$$

NB : utile en physique pour faire apparaître amplitude et déphasage d'un signal sinusoïdal.

Dans le cas où $(a, b) \neq (0, 0)$, le réel φ vérifie: $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$.

Remarques

- En changeant un peu la preuve, on peut aussi transformer $a\cos x + b\sin x$ en $\cos(x+\varphi)$, $\sin(x-\varphi)$, $\sin(x+\varphi)$ avec ϕ adapté à chaque cas.
- En pratique, on n'apprend par coeur le résultat précédent qui donne $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ en fonction de a et b, on refait le calcul qui consiste à factoriser par $\sqrt{a^2+b^2}$ puis on fait apparaître la formule d'addition qui nous intéresse pour obtenir l'une des quatre versions possibles ci-dessus.

✎ **En pratique** ✎ Par exemple si l'on veut transformer $\cos x + \sqrt{3}\sin x$. On écrit:

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = 2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3} + \sin x\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Pour illustrer la remarque ci-dessus, on aurait aussi pu écrire:

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = 2\left(\cos x\sin\frac{\pi}{6} + \sin x\cos\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

I.2 Equations trigonométriques

Pour finir on rappelle les formules de base de résolution des équations trigonométriques.

Théorème (Équations trigonométriques)

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos x = \cos a \quad &\Leftrightarrow \quad x = a\ [2\pi] \ \textbf{ou}\ x = -a\ [2\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x = a + 2k\pi \ \textbf{ou}\ \exists k \in \mathbb{Z}/x = -a + 2k\pi \\
\sin x = \sin a \quad &\Leftrightarrow \quad x = a\ [2\pi] \ \textbf{ou}\ x = \pi - a\ [2\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x = a + 2k\pi \ \textbf{ou}\ \exists k \in \mathbb{Z}/x = \pi - a + 2k\pi \\
\tan x = \tan a \quad &\Leftrightarrow \quad x = a\ [\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x = a + k\pi \text{ pour } a \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

⚠ **Attention** ⚠ Ne pas oublier **les deux groupes de solutions** (séparés par le **ou**), que l'on visualise sur le cercle trigonométrique.

Exercice.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$, l'équation $2\cos(3x) = 1$.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis $[0, 2\pi]$ l'équation $\sin(x) + \sin(2x) = 0$.

II Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

II.1 Définition, premières propriétés

Définition (Construction de $\mathbb{C}$)

- Au départ, $\mathbb{C}$ est l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\mathbb{C}$ est muni de deux opérations, appelées loi de composition interne :
  - $+$ définie par : $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
  - $\times$ définie par : $(x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$
- On montre que $+$ et $\times$ vérifient les propriétés conférant à $\mathbb{C}$ la structure de **corps** (cf. cours sur les structures algébriques) : associativité, commutativité, existence de neutres, de symétriques, distributivité de de la multiplication vis-à-vis de l'addition.
- Nouvelle notation :
  - l'élément $(0, 1)$ est noté i
  - les éléments $(x, 0)$ sont notés x. Le complexe (x, y) s'écrit alors $x + \mathrm{i}\, y$, appelé **la forme algébrique du nombre complexe**.
  - On a la relation $\mathrm{i}^2 = -1$
  - Cette nouvelle notation, et la définition des deux opérations $+$ et $\times$ permet d'utiliser les règles naturelles des opérations. En particulier,

$$(x + \mathrm{i}\, y) + (x' + \mathrm{i}\, y') = (x + x') + \mathrm{i}(y + y') \quad \text{(addition)}$$
$$(x + \mathrm{i}\, y)(x' + \mathrm{i}\, y') = (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + x'y) \quad \text{(multiplication).}$$

- Si $z = x + \mathrm{i}\, y$ où x et y sont réels alors x est **la partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$ et y la **partie imaginaire** de z notée $\mathrm{Im}(z)$.
- Les nombres complexes de la forme $\mathrm{i}\, y$ où $y \in \mathbb{R}$ sont appelés des **imaginaires purs**. Leur ensemble est noté est $\mathrm{i}\,\mathbb{R}$.

Remarques (Opérations et règles de calculs)

Si z, z', z' sont des complexes alors

- $z + z' = z' + z$ et $zz' = z'z$ c'est la commutativité de l'addition et la multiplication
- $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$ et $(zz')z'' = z(z'z'')$ c'est l'associativité de l'addition et la multiplication
- $z + 0 = 0 + z = z$, $z \times 1 = 1 \times z = z$: 0 et 1 sont respectivement neutres pour pour l'addition et la multiplication.
- $z + (-z) = (-z) + z = 0$ ($-z$ est l'opposé (ou symétrique pour la loi $+$) de $z \in \mathbb{C}$)
- si $z \in \mathbb{C}^*$, $z = x + \mathrm{i}\, y$ avec x et y réels, on définit, $\dfrac{1}{z}$ par

$$\frac{1}{z} = \frac{x - \mathrm{i}\, y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\, \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

  On constate que $z \times \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \times z = 1$, ($\frac{1}{z}$ est l'inverse (ou symétrique pour la loi $\times$) de $z \in \mathbb{C}^*$)
- $z(z' + z'') = zz' + zz''$, c'est la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Remarques (Identification parties réelle et imaginaire)

Il y a unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire i.e.

$$\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4, \qquad x + \mathrm{i}\, y = x' + \mathrm{i}\, y' \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \quad .$$

On dit dans ce cas, que l'on **identifie parties réelle et imaginaire**. En particulier, un nombre complexe est nul si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont nulles.

Remarques

- i est noté j par les physiciens pour éviter la confusion avec l'intensité en electricité.
- On a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, car si $x \in \mathbb{R}$ alors $x = x + 0 \cdot \mathrm{i}$.

Propriétés ($\mathbb{R}$-linéarité de Re et Im)

Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\boxed{\lambda \in \mathbb{R}}$. Alors

1) $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$
2) $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$
3) $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z)$
4) $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}(z)$

II.2 Plan complexe

Le *plan affine* $\mathcal{P}$ (ensemble de points) est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est le *plan vectoriel associé* (ensemble des vecteurs).

Définition (Image - Affixe)

Soit $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- Le **vecteur image** de z dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est le vecteur $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$. On dit que z est l'*affixe* (n.f.) de $\overrightarrow{v}$. On note $\overrightarrow{v}(z)$ ou $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Le **point image** de z dans $\mathcal{P}$ est le point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$. On dit que z est l'*affixe* (n.f.) de M. On note $M(z)$.

Propriétés (Interprétation des opérations)

1) Pour tous points A, B de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives $a, b \in \mathbb{C}$, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $b - a$.
2) Soient $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v'} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ d'affixes respectives $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
   - $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v'}$ a pour affixe $z + z'$
   - $\lambda\overrightarrow{v}$ a pour affixe λz.

II.3 Conjugaison

Définition (Conjugué)

Soit $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle conjugué de z le complexe $\overline{z} = x - \mathrm{i}\, y$.

Exercice. Résoudre l'équation : $2z + 3\,\mathrm{i}\,\overline{z} = 5$.

Propriétés

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

1) $\overline{\overline{z}} = z$
2) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
3) $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
4) Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
5) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$, $\quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\,\mathrm{i}}$.
6) **Caractérisation des réels et des imaginaires purs à l'aide de la conjugaison**.
$$\begin{cases} \overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R} \\ \overline{z} = -z \iff z \in i\mathbb{R} \end{cases}$$

Exercice. Déterminer l'ensemble E_1 des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z-1}{z+1}$ est réel et l'ensemble E_2 des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z-1}{z+1}$ est imaginaire pur.

Remarques

Si $z = x + \mathrm{i}\, y$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on constate que $z \times \overline{z} = x^2 + y^2$ (qui est donc réel) et donc si $z \neq 0$,

$$\frac{1}{z} \overset{\text{def}}{=} \frac{x - \mathrm{i}\, y}{x^2 + y^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}.$$

✎ **En pratique** ✎ La remarque ci-dessus, fournit une méthode pratique pour obtenir la forme algébrique de l'inverse d'un nombre complexe ou du quotient de deux nombles complexes. On "chasse" le i du dénominateur, en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur. Par exemple

$$\frac{2 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}} = \frac{(2 - \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})}{(1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})} = \frac{1 - 3\,\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,\mathrm{i}\,.$$

II.4 Module d'un nombre complexe

Définition (Module)

Soit $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On définit le *module* de z, noté $|z|$, par

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Remarque, si $z \in \mathbb{R}$, on retrouve $|z|$ comme la valeur absolue de z.

Remarques (Interprétation géométrique)

- Si M est le point d'affixe z alors $|z|$ représente la distance OM.
- Si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur d'affixe z alors $|z|$ représente la $\|\overrightarrow{u}\|$.
- Si z et z' sont deux complexes, $|z - z'|$ représente la distance MM' où M et M' ont pour affixes respectvies z et z'.
- Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. L'ensemble de points $M(z)$ vérifiant $|z - a| = r$ est le cercle de centre $\Omega(a)$ et de rayon r.
  L'ensemble de points $M(z)$ vérifiant $|z - a| \leqslant r$ est le disque de centre $\Omega(a)$ et de rayon r.

Propriétés (du module)

Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors:

1) $|z| \in \mathbb{R}^+$
2) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
3) $|z|^2 = z\overline{z}$
4) $|\overline{z}| = |-z| = |z|$
5) $|zz'| = |z||z'|$, si $n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$
6) Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
7) $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|, \qquad |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.

Exercice. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $|z + 1| = |z - 1|$.
On peut utiliser trois méthodes : une méthode géométrique qui interprète les modules comme des distances, une méthode qui consiste à exploiter la propriété 3) ci-dessus, et une méthode qui consiste à poser $z = x + \mathrm{i}\, y$ dès le départ.

Exercice. Retour à l'exercice vu plus haut où l'on cherche l'ensemble E_2 des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\dfrac{z-1}{z+1}$ est imaginair pur.

Exercice. Soient a et b deux complexes de module 1. Démontrer que $\dfrac{(a+b)^2}{ab}$ et $\dfrac{a+b}{1+ab}$ sont réels.

Théorème (Inégalité triangulaire et conséquences)

$\boxed{\text{Soient } (z, z') \in \mathbb{C}^2. \text{ Alors : } \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|.}$ (avec égalité si et seulement si z et z' sont proportionnels avec constante de proportionnalité positive).

Conséquences :

1) $|z - z'| \leqslant |z| + |z'|$
2) $||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|$ (inégalité triangulaire renversée).
3) Pour tout $z_1, \ldots, z_n$ dans $\mathbb{C}$,
$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i|.$$

Exercice. Montrer que pour tous complexes a et b: $|1 + a| + |a + b| + |b| \geqslant 1$.
Exercice. Montrer que pour tous réels a, b et c, on a
$$\sqrt{2}|a + b + c| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}.$$

III Forme trigonométrique des nombres complexes

III.1 Ensemble des nombres complexes de module 1

Théorème-Définition (Groupe des nombres complexes de module 1)

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$.
Cet ensemble vérifie les propriétés suivantes :

1) $1 \in \mathbb{U}$ (1 est l'élément neutre pour la multiplication)
2) $\mathbb{U}$ est **stable par multiplication** : si $(z, z') \in \mathbb{U}^2$ alors $zz' \in \mathbb{U}$
3) $\mathbb{U}$ est **stable par inversion** : si $z \in \mathbb{U}$ alors $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

☞ **Explication** ☜ $\mathbb{U}$ est appelé *groupe* des nombres complexes de module 1. En mathématiques, un groupe est un ensemble G muni d'une opération appelée loi de composition interne (l.c.i.) noté $\times$ qui vérifie

1) $\times$ est associative: $\forall (g, g', g'') \in \mathbb{R}^3, \quad (g \times g') \times g'' = g \times (g' \times g'')$
2) $\times$ possède un élément neutre, noté e: $\quad \forall g \in G,\ g \times e = e \times g = g$
3) tout élément de G possède un symétrique: $\forall g \in G, \exists g' \in G;\ g \times g' = g' \times g = e$

☞ **Explication** ☜ Si on identifie point et affixe, $\mathbb{U}$ est en fait le cercle trigonométrique i.e. le cercle de centre O et de rayon 1.

Définition (Notation exponentielle)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *exponentielle* de $\mathrm{i}\,\theta$, notée $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ le nombre complexe

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

☞ **Explication** ☜ Pour tout réel θ, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ est l'affixe du point M tel que $OM = 1$ et $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}}) = \theta \ [2\pi]$. On montre alors facilement que $\mathbb{U} = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \ / \ \theta \in \mathbb{R}\} = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \ / \ \theta \in [0, 2\pi[\}$. [Faire une figure: cercle trigo avec cos et sin.]

☞ **Explication** ☜ La notation exponentielle, qui n'est qu'une notation, n'est pas reliée (en tout cas pas dans cette définition) à l'exponentielle en tant que fonction usuelle. Cette notation est justifiée par la propriété 3) ci-dessous.

Propriétés (calculatoires de l'exponentielle)

Soient $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

1) $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right| = 1$.
2) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \neq 0$ et $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}$
3) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = -1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$
4) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$
5) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}}$
6) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = 1 \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$,
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} \iff \theta = \theta' \ [2\pi]$
7) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^n$ i.e $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$ (Formule de Moivre)

Théorème (Morphisme canonique)

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \to & (\mathbb{U},\times) \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}$ est un morphisme de groupes surjectif.

Autrement dit :

- $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{U},\times)$ ont une structure de groupe
- $\forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(\theta+\theta') = \varphi(\theta)\varphi(\theta')$.

III.2 Formules d'Euler et de Moivre

Théorème (Formule d'Euler)

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Méthode pratique (Linéarisation de $\cos^p\theta$, $\sin^p\theta$, $\cos^p\theta\sin^q\theta$)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$. Linéariser signifie que l'on se débarasse des puissances et des produits pour obtenir une expression ne contenant que des termes de forme $\cos(n\theta)$ et $\sin(m\theta)$.

- on remplace les cos et sin à l'aide des formules d'Euler
- on développe, on utilise le développement connu de $(a+b)^n$
- on regroupe les termes conjugués
- on utilise de nouveau les formules d'Euler.

Exemples Linéariser $\cos^2\theta$, $\cos^3\theta$

$$\cos^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}\right) = \frac{1}{4}(2+2\cos(2\theta))$$

$$\boxed{\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))}.$$

$$\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}\right) = \frac{1}{8}(2\cos(3\theta)+6\cos\theta)$$

$$\boxed{\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{3}{4}\cos\theta}.$$

Exercice. Linéariser $\sin^3\theta$, $\cos^3\theta\sin^2\theta$.
Exercice. Retrouver la formule de transformation de somme en produit $\cos a \sin b = ...$

Théorème (Formule de Moivre)

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \qquad \text{ou} \qquad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

✎ Méthode pratique ✎ (Développement de $\cos(n\theta)$, $\sin(n\theta)$)

Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$. Développer signifie que l'on transforme les expressions $\cos(n\theta)$, $\sin(n\theta)$ en des expressions ne dépendant que de produits et de puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$. C'est grosso modo la démarche inverse de la linéarisation.

- on part de $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n\right)$ ou $\sin(n\theta) = \mathrm{Im}\left((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n\right)$
- on développe $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$
- on identifie la partie réelle ou la partie imaginaire
- parfois, on peut demander à exprimer le résultat uniquement en fonction (polynomiale) de $\cos\theta$ ou en fonction de $\sin\theta$. Ca n'est pas toujours faisable, dans les cas où c'est faisable on le réalise en utilisant la formule $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Exemples Développer $\cos(2\theta)$, $\sin(2\theta)$

- D'après la formule de Moivre

$$\cos(2\theta) + \mathrm{i}\sin(2\theta) = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2\,\mathrm{i}\sin\theta\cos\theta.$$

En identifiant parties réelle et imaginaire, il vient alors

$$\boxed{\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta} \qquad \boxed{\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta}.$$

Remarquons que l'on peut retrouver ces formules de duplication en utilisant les formules d'addition.

Exercice. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$. Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(3\theta)$.
Exercice. Retrouver la formule d'addition $\cos(a+b) = ...$

Propriétés (Technique de l'angle moitié)

Soient $(\theta, \theta' \in \mathbb{R})$.

1) $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}$, $\qquad 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = -2\,\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}$

2) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} = 2\cos\frac{\theta-\theta'}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta+\theta'}{2}}$, $\qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} = 2\,\mathrm{i}\sin\frac{\theta-\theta'}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta+\theta'}{2}}$

✎ **En pratique** ✎ Il n'est pas utile de connaître ces formules par coeur, il faut cependant savoir les retrouver i.e. connaître la preuve ci-dessus.

Remarques

1) Cette technique permet de mettre $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$ sous sous la forme $R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}$ où R et ϕ sont deux réels (c'est la forme trigonométrique si R est positif).

Exercice. Retrouver la formule de transformation de somme en produit $\cos p + \cos q = ...$

✎ Méthode pratique ✎ (Calcul de sommes de cos ou de sin.)

- Remplacer $\cos(a)$ par $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a}$, $\sin(a)$ par $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a}$
- En exploitant la $\mathbb{R}$-linéarité de Re et Im, reconnaitre une somme géométrique ou la formule du binôme, la calculer alors.
- Identifier la partie réelle ou la partie imaginaire.

Exercice. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

Exercice. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

III.3 Argument d'un nombre complexe

Définition (Argument - Forme trigonométrique)

Soit z un complexe **non nul**.

- Alors $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. Il existe donc un réel θ, unique à 2π près, tel $z = |z| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$. Un tel réel θ est appelé **un** **argument** de z et est noté $\mathrm{Arg}(z)$.
- L'écriture $z = |z| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)}$ est appelée la **forme trigonométrique** ou la **forme exponentielle** de z.

⚠ **Attention** ⚠ Le complexe nul n'a pas d'argument et faute d'unicité on parle d'**un** argument.

⚠ **Attention** ⚠ $z = \rho \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ est la forme trigonométrique de z si $\rho > 0$. Dans le cas où $\rho < 0$, on "‘rentre le signe $-$"’ dans l'exponentielle en écrivant $\rho = (-\rho)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}$.

✎ **En pratique** ✎ Pour déterminer un argument d'un complexe on l'écrit sous la forme $z = |z| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$. Selon les cas, en mettant $|z|$ en facteur, ou à l'aide de la technique de l'angle moitié.

Exemples

- Déterminer le module et un argument de $z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

  $|1 - \mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$. Puis $1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Donc $\mathrm{Arg}(z) = -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
- Déterminer le module et un argument de $(1+\mathrm{i})^{12}$.

  $|1+\mathrm{i}\,| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Puis $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Et donc $(1+\mathrm{i})^{12} = (\sqrt{2})^{12}\,\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,\pi} = -64$. Donc $\mathrm{Arg}(z) = \pi\ [2\pi]$.
- Déterminer le module et un argument de $z = 1 + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{8}}$.

  $z = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}}\left(\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\,\pi}{16}} + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}} = 2\cos\frac{\pi}{16}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}}\right)$.
  Comme $2\cos\frac{\pi}{16} > 0$ alors $|z| = 2\cos\frac{\pi}{16}$ et $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{16}\ [2\pi]$.

☞ **Explication** ☜ Pour tout complexe non nul z, on a $\mathrm{Arg}(z) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u})\ [2\pi]$ où M est le point d'affixe z, $\overrightarrow{u}$ est le vecteur d'affixe z.

Remarques (Identification module et argument)

Il y a unicité du module et de l'argument à 2π près i.e.

$$\forall(\rho,\rho') \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2, \qquad \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \rho'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} \iff \begin{cases} \rho = \rho' \\ \theta = \theta'\ \ [2\pi] \end{cases}.$$

On dit dans ce cas, que l'on **identifie module et argument**.

Propriétés (des arguments)

Soient z, z' deux complexes **non nuls**.

1) $\operatorname{Arg}(z) = 0 \ [2\pi] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+^*$

   $\operatorname{Arg}(z) = 0 \ [\pi] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*$

   $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{2} \ [\pi] \Leftrightarrow z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}^*$

2) $\operatorname{Arg}(\overline{z}) = -\operatorname{Arg}(z) \ [2\pi]$

3) $\operatorname{Arg}(zz') = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z') \ [2\pi]$

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg}(z) \ [2\pi]$

5) $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\operatorname{Arg}(z) \ [2\pi]$

6) $\operatorname{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(z') \ [2\pi]$

Propriétés (Interprétation géométrique)

Si A, B, C, D sont quatre points du plan **deux à deux distincts** d'affixes respectives a, b, c, d alors

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB}) = \operatorname{Arg}(d-c) - \operatorname{Arg}(b-a) = \operatorname{Arg}\frac{d-c}{b-a}. \ [2\pi]$$

III.4 Exponentielle complexe

Définition (Exponentielle complexe)

Soit $z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathbb{C}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On définit l'**exponentielle complexe** de z, notée e^z ou $\exp(z)$, par

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

Théorème (Propriétés de l'exponentielle complexe)

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, avec $z = x + \mathrm{i}\,y$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

1) $|\,\mathrm{e}^z\,| = \mathrm{e}^x, \quad \operatorname{Arg}(\mathrm{e}^z) = y \ [2\pi]$

2) $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{z'}$

3) $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \Leftrightarrow z - z' \in 2\,\mathrm{i}\,\pi\mathbb{Z}$.

Exercice. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^z = 2 + 2\,\mathrm{i}$. (penser à identifier module et argument).

Remarques ($\exp$ est un morphisme de groupes)

L'application $\begin{array}{rccc} \exp: & (\mathbb{C}, +) & \to & (\mathbb{C}^*, +) \\ & z & \mapsto & \mathrm{e}^z \end{array}$ est un morphisme de groupes.

IV Équations complexes

IV.1 Factorisation de $P(z)$ par $z-a$

Théorème-Définition (Racine)

Soient P une fonction polynomiale à coefficients complexes et $a \in \mathbb{C}$.

- On dit que a est **racine** de P si $P(a)=0$.
- Si a est racine de P alors on peut factoriser $P(z)$ par $z-a$, autrement dit, il existe Q une fonction polynomiale tel que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z)=(z-a)Q(z).$$

✎ Méthode pratique ✎ (Factorisation par $z-a$)

- **Méthode 1 : en ligne. Très efficace !** On part de $P(z)=(z-a)(......)$ pour déterminer un par un tous les termes de la fonction polynomiale Q.
- **Méthode 2 : identification des coefficients. Plus longue et plus pénible à rédiger au propre.** On pose la factorisation à priori et la fonction polynomiale Q et ses coefficients en tenant compte du fait que le degré de Q est celui de P moins 1.
On développe $(z-a)Q$ et par **unicité** des coefficients on identifie avec ceux de P qui nous amène à poser un système que l'on résout.

Exercice. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3-z^2+2=0$.

IV.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul.

Définition (Racine n-ième)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $Z \in \mathbb{C}$. On dit que $z \in \mathbb{C}$ est une racine n-ième de Z si $z^n=Z$.
- On dit que $z \in \mathbb{C}$ est une racine n-ième de l'unité si $z^n=1$.

Théorème (Il y a n racines n-ièmes)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout nombre complexe **non nul** admet dans $\mathbb{C}$ exactement n racines n-ièmes deux à deux distinctes.
- Il existe n racines n-ièmes de l'unité deux à deux distinctes. Leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$ et:
$$\mathbb{U}_n=\left\{\omega_k=\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}} \;/\; k \in [\![0,n-1]\!]\right\} \subset \mathbb{U}.$$

Exercice. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^6-(z+1)^6=0$.

Propriétés (des racines n-ièmes de l'unité)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

1) La somme des racines n-ième de l'unité est nulle i.e. $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$.

2) Les images M_k d'affixe ω_k forment un polygône régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.

Théorème ($\mathbb{U}_n$ est un groupe)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{U}_n$ est un groupe fini contenant n éléments.

Exemple Racines cubiques de l'unité. **À connaitre**. Les racines cubiques de l'unité sont:

$$1,\ j = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2},\ j^2 = \overline{j} = \mathrm{e}^{\frac{4\,\mathrm{i}\,\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On a les relations (à connaître aussi):

$$\boxed{j^2 = \overline{j}, \quad 1 + j + j^2 = 0, \quad j^3 = 1}.$$

⚠ **Attention** ⚠ Éviter la confusion du j en physique qui représente l'imaginaire pur i.

✎ Méthode pratique ✎ (Déterminer les racines n-ièmes d'un complexe Z.)

Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. Si l'on connait **une** racine n-ième de a de Z (après avoir par exemple mis Z sous forme trigonométrique), l'objectif est de se ramener aux racines n-ièmes de l'unité en résolvant :

$$z^n = Z \Leftrightarrow z^n = a^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{a}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{a} \in \mathbb{U}_n = \left\{\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}} \ / \ k \in [\![0, n-1]\!]\right\} \Leftrightarrow z \in \left\{a\,\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}} \ / \ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$

En pratique on refera toute cette démarche.

Exercice. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 27$.
Exercice. Déterminer les les racines cinquièmes de $-2\,\mathrm{i}$ (penser à mettre $-2\,\mathrm{i}$ sous forme trigonométrique.

IV.3 Calcul des racines carrées d'un nombre complexe non nul (cas $n = 2$)

Pour le calcul des **racines carrées** d'un nombre complexe non nul, on peut adopter deux stratégies suivant le contexte, en passant par la forme algébrique ou par la forme trigonométrique.

⚠ **Attention** ⚠ **Ne jamais écrire** $\sqrt{Z}$ pour désigner les racines carrées complexes, car il y en a deux et cette notation est réservée à la racine carrée positive d'un réel positif.

Méthode pratique (Recherche de racines carrées)

On souhaite obtenir les deux racines carrées d'un complexe $Z \in \mathbb{C}^*$.

- **Forme trigonométrique.** Si on dispose de la forme trigonométrique de $Z = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\Phi}$ où $R = |Z| \in \mathbb{R}_+^*$, $\Phi \in \mathbb{R}$. Les deux racines carrées (elles sont opposées) de Z sont:

$$\sqrt{R}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\Phi}{2}}, \qquad \sqrt{R}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\Phi}{2}+\pi\right)} = -\sqrt{R}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\Phi}{2}}.$$

- **Forme algébrique.** Si on dispose de la forme algébrique de $Z = X + \mathrm{i}\,Y$ où $(X, Y) \in (\mathbb{R}^*)^2$. On cherche $z \in \mathbb{C}^*$ sous forme algébrique $z = x + \mathrm{i}\,y$ où $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tel que $z^2 = Z$.

  Alors,

$$\boxed{Z = z^2 \iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}\left(X + \sqrt{X^2+Y^2}\right) \\ y^2 = \frac{1}{2}\left(-X + \sqrt{X^2+Y^2}\right) \\ 2xy = Y \end{cases}.}$$

  On tire x et y à partir des deux premières équations, au signe près. Le signe est déterminé à l'aide de la troisième équation.

Exercice.

1) Déterminer les racines carrées de $1 + \mathrm{i}$.

2) Déterminer les racines carrées de $3 - 4\,\mathrm{i}$.

3) Déterminer les racines carrées de $2 - \mathrm{i}$.

IV.4 Équations du second degré à coefficients complexes

On décrit la méthode de résolution de l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ où a, b, c sont trois complexes avec $a \neq 0$.

Théorème (Équation du second degré à coefficients complexes)

On appelle **discriminant** de l'équation (E), le réel $\Delta = b^2 - 4ac$. Plusieurs cas:

- si $\Delta \neq 0$, l'équation (E) admet deux solutions distinctes

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

  où δ est **une** (n'importe laquelle des deux) racine carrée complexe de Δ

- si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une unique solution (appelée solution double)

$$z = -\frac{b}{2a}$$

De plus, les solutions, distinctes ou non, vérifient:

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Exercice.

1) Résoudre l'équation $z^2 + z + 1 - \mathrm{i} = 0$.

2) Résoudre l'équation $z^2 - 2\,\mathrm{i}\,z + \mathrm{i}\,\sqrt{3} = 0$

V Application des nombres complexes à la géométrie plane

V.1 Caractérisation des configurations géométriques

Théorème (Interprétation géométrique de $\frac{z-a}{z-b}$)

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{a,b\}$ et A, B, M les points d'affixes respectives a, b, z. Alors

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \frac{MA}{MB} \qquad \operatorname{Arg}\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) \ [2\pi].$$

Théorème (Alignement orthogonalité)

Soient $A, B, C \in \mathcal{P}$ d'affixes respectives a, b, c avec $B \neq A$.

1) **Alignement**. A, B, C alignés $\Leftrightarrow \dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.

2) **Orthogonalité**. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \dfrac{c-a}{b-a} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$

Exercice. Soient A et B deux points d'affixes respectives $a = 1 - \mathrm{i}$ et $b = 2 + 3\,\mathrm{i}$. Déterminer les affixes des points de la droite (AB).

Exercice. Soient A, B, C trois points d'affixes respectives $a = 1 + \mathrm{i}$, $b = 2 + 3\,\mathrm{i}$, $c = 5 - \mathrm{i}$. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $A(1)$, $M(z)$, $N(z^2)$ soient alignés.

V.2 Transformations du plan

Dans cette partie on étudie des fonctions du plan définies par $F : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ M(z) & \mapsto & M'(z') \end{array}$. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z' \end{array}$ est l'application complexe associée à F ou l'écriture complexe de F. Le but de ce paragraphe est d'établir le lien entre la nature de F (rotation, symétrie...) et l'expression de f (i.e. z' en fonction de z).

Théorème (Transformation)

1) L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ M(z) & \mapsto & M'(-z) \end{array}$ est la symétrie de centre O.

2) L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ M(z) & \mapsto & M'(\bar{z}) \end{array}$ est la symétrie par rapport à (Ox).

3) L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ M(z) & \mapsto & M'(-\bar{z}) \end{array}$ est la symétrie par rapport à (Oy).

4) Soit $b \in \mathbb{C}$. L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ M(z) & \mapsto & M'(z+b) \end{array}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b.

5) Soit $k \in \mathbb{R}$. L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ M(z) & \mapsto & M'(kz) \end{array}$ est l'homothétie de centre $0O$ et de rapport k.

6) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ M(z) & \mapsto & M'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\, z) \end{array}$ est la rotation de centre O et d'angle θ.

✎ Méthode pratique ✎ (Étude de la transformation d'écriture complexe $z \mapsto az + b$.)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq 0$, on pose

$$F : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ M(z) & \mapsto & M'(z') \end{array} \quad \text{où} \quad z' = az + b.$$

- Si $a = 1$, F est une translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, F est la composée (commutative) d'une rotation et d'une homothétie de même centre (F est appelée similitude directe).
  - on détermine le centre $\Omega(\omega)$ en recherchant le point fixe, en résolvant $z = az + b$
  - le rapport de l'homothétie est alors $|a|$
  - l'angle de la rotation est un argument de a.

Exercice. Déterminer la nature de la transformation d'expression complexe $z \mapsto (1 - \mathrm{i})z + 3\,\mathrm{i}$.
Exercice. Soient A, B, C, D un carré dont les sommets sont à coordonnées entières. Démontrer qu'il en est de même pour C et D.

VI Fonctions à valeurs complexes

VI.1 Exponentielle complexe

Théorème-Définition (Fonctions à valeurs complexes)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On pose

$$\mathrm{Re}f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Re}f(x) \end{array}, \qquad \mathrm{Im}f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Im}f(x) \end{array}.$$

- f est dérivable sur I si et seulement si $\mathrm{Re}f$ et $\mathrm{Im}f$ sont dérivables sur I.
- Si f est dérivable sur I alors $f' = (\mathrm{Re}f)' + \mathrm{i}(\mathrm{Im}f)'$.

On rappelle que pour $z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathbb{C}$ on définit $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$.

Théorème (Fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$)

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{\alpha x} \end{array}$ est dérivable de dérivée $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha x} \end{array}$

Théorème

Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I. Alors la fonction $g : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{\varphi(x)} \end{array}$ est dérivable sur I de dérivée: $\forall x \in I,\ g'(x) = \varphi'(x)\,\mathrm{e}^{\varphi(x)}$.