Chapitre
Fonctions usuelles (2ème partie)

I Fonctions circulaires directes

Théorème (Sinus, cosinus, tangente, cotangente)

- Les fonctions sin, cos sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$, sont 2π-périodiques, sin est impaire et cos est paire.
- La fonction $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\}$ et y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

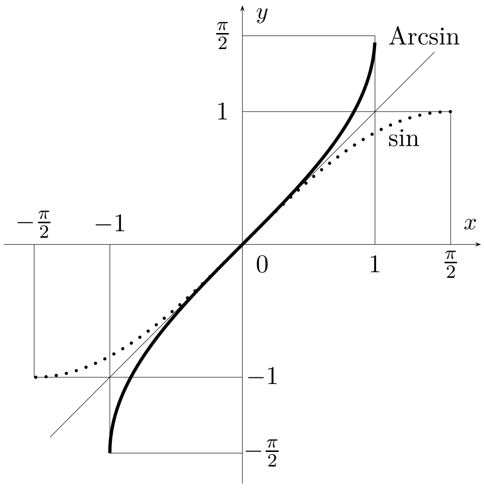
tan est π-périodique et impaire.

Théorème (Limites usuelles)

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$

II Fonctions circulaires réciproques

II.1 Arcsin



☞ **Explication** ☜ La fonction sin est continue, strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et vérifie $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$ donc réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$, sa bijection réciproque est notée

$$\text{Arcsin} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Théorème (Propriétés de Arcsin**)**

1) **Parité**. Arcsin est impaire.

2) Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\begin{cases} \sin(\text{Arcsin}(x)) = x \\ \cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$.

3) $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x \Leftrightarrow x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

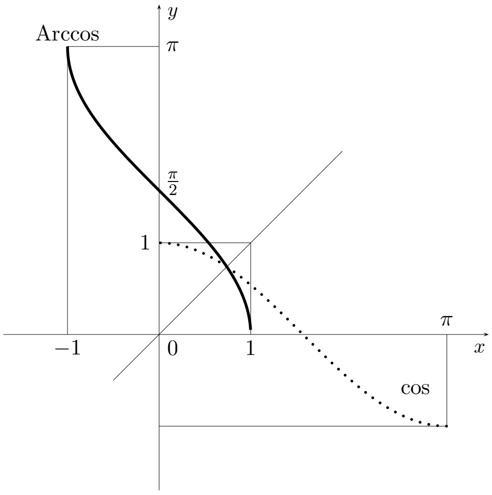
4) **Dérivabilité**. Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ de dérivée: $\forall x \in]-1, 1[, \ \text{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

⚠ **Attention** ⚠ La propriété 3) est très importante car **on n'a pas en général** $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x$. Par exemple $\text{Arcsin}(\sin(4\pi)) = \text{Arcsin}(0) = 0$. Cette relation n'est vraie que si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Valeurs remarquables de Arcsin.

$\text{Arcsin}(0) =$ $\qquad$ $\text{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right) =$ $\qquad$ $\text{Arcsin}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) =$ $\qquad$ $\text{Arcsin}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) =$ $\qquad$ $\text{Arcsin}(1) =$

II.2 Arccos



☞ **Explication** ☜ La fonction cos est continue, strictement décroissante sur $[0,\pi]$, donc cos réalise un bijection de $[0,\pi]$ vers $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$, sa bijection réciproque est notée:

$$\operatorname{Arccos} : [-1,1] \to [0,\pi].$$

Théorème (Propriétés de Arccos**)**

1) Pour tout $x \in [-1,1]$, $\begin{cases} \cos(\operatorname{Arccos}(x)) = x \\ \sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$.

2) $\operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x \Leftrightarrow x \in [0,\pi]$.

3) **Dérivabilité.** Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée: $\forall x \in]-1,1[,\ \operatorname{Arccos}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

⚠ **Attention** ⚠ La propriété 2) est très importante car **on n'a pas en général** $\operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x$. Par exemple $\operatorname{Arccos}(\cos(4\pi)) = \operatorname{Arccos}(1) = 0$. Cette relation n'est vraie que si $x \in [0,\pi]$.

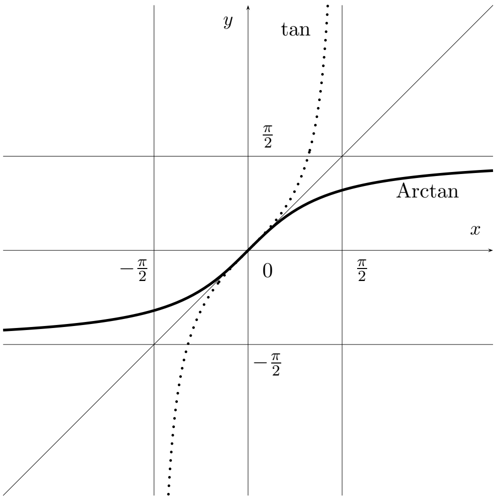
Valeurs remarquables de Arccos.

$\operatorname{Arccos}(0) =$ $\quad \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) =$ $\quad \operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$ $\quad \operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$ $\quad \operatorname{Arccos}(1) =$

$\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) =$ $\quad \operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$ $\quad \operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$ $\quad \operatorname{Arccos}(-1) =$.

Exercice. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $\begin{cases} \operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arcsin}(x) = \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arccos}(-x) = \pi \end{cases}$

II.3 Arctan



☞ **Explication** ☜ La fonction tan est continue, strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$, sa bijection réciproque est notée

$$\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Théorème (Propriétés de Arctan**)**

1) **Parité.** Arctan est impaire.
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\mathrm{Arctan}(x)) = x$.
3) $\mathrm{Arctan}(\tan(x)) = x \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
4) **Dérivabilité.** Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée: $\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
5) **Formule.** Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

⚠ **Attention** ⚠ La propriété 3) est très importante car **on n'a pas en général** $\mathrm{Arctan}(\tan(x)) = x$. Par exemple $\mathrm{Arctan}(\tan(4\pi)) = \mathrm{Arctan}(0) = 0$. Cette relation n'est vraie que si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Valeurs remarquables de Arctan.

$\mathrm{Arctan}(0) =$ $\qquad$ $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) =$ $\qquad$ $\mathrm{Arctan}\,(1) =$ $\qquad$ $\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) =$

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Simplifier une expression en** Arctruc**)**

Pour simplifier une expression ou démontrer une formule comportant des fonctions trigonométriques circulaires, trois méthodes.

1) En dérivant et en retrouvant une dérivée connue.
2) On calculer la tangente, le sinus ou le cosinus de l'expression ou de l'un des deux membres.
3) On effectue un changement de variable ad hoc.

Exercice. Simplifier $X = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{2} + \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{3}$. *[On pourra utiliser la formule d'addition* $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$*.]*

Exercice. Simplifier pour $x \in]-1, 1[$, $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. On pourra poser $x = \sin\theta$ où $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

II.4 Application : argument d'un nombre complexe

Dans le cas où un argument d'un nombre complexe n'est pas une valeur exacte, on peut l'exprimer à l'aide des fonctions trigonométriques circulaires réciproques.

Posons $z = a + \mathrm{i}\, b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a, b) \neq (0, 0)$. On note θ un argument de z, en factorisant par le module de z, on obtient :

$$z = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \mathrm{i}\,\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

Ainsi,

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a} \quad (\text{si } a \neq 0).$$

Notons que le signe de $\cos\theta$ est le même que celui de a et le signe de $\sin\theta$ est le même que celui de b.
On peut alors exprimer θ à l'aide de Arccos, Arcsin et Arctan en tenant compte du signe de $\cos\theta$ (ou de a) et $\sin\theta$ (ou de b).

Exercice. Déterminer un argument de $2 + 3\,\mathrm{i}$, $3 - \mathrm{i}$.

III Fonctions hyperboliques

Définition (Cosinus, sinus, tangente hyperbolique)

On appelle:

- **cosinus hyperbolique**, l'application $\begin{array}{rccl} \mathrm{ch}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array}$
- **sinus hyperbolique**, l'application $\begin{array}{rccl} \mathrm{sh}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array}$
- **tangente hyperbolique**, l'application $\begin{array}{rccl} \mathrm{th}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} \end{array}$.

☞ **Explication** ☜ On remarquera l'analogie avec les formules d'Euler.

Théorème (Propriétés de $\mathrm{sh}, \mathrm{ch}, \mathrm{th}$)

1) **Dérivabilité.** Les fonctions sh, ch, th sont de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\mathrm{sh}' = \mathrm{ch} \qquad \mathrm{ch}' = \mathrm{sh} \qquad \mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}^2}.$$

2) **Parité.** sh et th sont impaires et ch est paire.

3) **Limites.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$, $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1$.

4) **Formule trigo.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = \mathrm{e}^{x} \\ \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$. Conséquence: $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

5) **Inégalités.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(x) \geqslant 1 \qquad \mathrm{sh}(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{x}}{2} \leqslant \mathrm{ch}(x) \qquad -1 < \mathrm{th}(x) < 1.$$

6) **Limites découlant de taux d'accroissement**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}\, x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{th}\, x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{ch}\, x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

☞ **Explication** ☜ La formule $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$ est l'analoque de la formule trigonométrique $\cos^2 + \sin^2 = 1$. En fait, on peut obtenir un formulaire de trigonométrie hyperbolique similaire à celui de trigonométrie circulaire, il suffit de remplacer cos par ch et sin par $\mathrm{i}\,\mathrm{sh}$ et donc tan par $\mathrm{i}\,\mathrm{th}$.

Exemple Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$. En effet,

$$\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) = \frac{\mathrm{e}^{a}+\mathrm{e}^{-a}}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{b}+\mathrm{e}^{-b}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{a}-\mathrm{e}^{-a}}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{b}-\mathrm{e}^{-b}}{2} = \frac{1}{4}(2e^{a+b} + 2\,\mathrm{e}^{-a-b}) = \mathrm{ch}(a+b).$$