Chapitre
Calcul de primitives

I Primitives d'une fonction à valeurs complexes

I.1 Primitives

Définition (Primitive)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une application où I **est un intervalle de** $\mathbb{R}$.

- On dit qu'une application $F : I \to \mathbb{K}$ est **une** primitive de f sur I si F est dérivable sur I avec $F' = f$.
- **Notation** On note $\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ toutes les expressions de primitives f.

Théorème (Existence de primitives)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une application où I **est un intervalle de** $\mathbb{R}$.

- Si f est continue sur I alors f admet des primitives sur I
- Deux primitives quelconques de f sur I diffèrent d'une constante appartenant à $\mathbb{K}$.

Exemples

1) $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est **une** primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$. On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

2) Arctan est **une** primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$. On note pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{Arctan} x + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

⚠ **Attention** ⚠ On utilisera des lettres différentes pour la variable muette d'intégration et la borne. On interdit donc : $\int^x f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ensemble de validité	**Expression fonction**	**Expression primitive** (à une constante additive près)
$\mathbb{R}$	$\mathrm{e}^{\alpha x}, \alpha \neq 0$	$\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha}$
$\mathbb{R}_+^*$	$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\mathbb{R}^*$	$x^n, n \in \mathbb{Z}_- \setminus \{0,-1\}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\mathbb{R}$	$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(\alpha x),\ \alpha \neq 0$	$\dfrac{\mathrm{sh}(\alpha x)}{\alpha}$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(\alpha x),\ \alpha \neq 0$	$\dfrac{\mathrm{ch}(\alpha x)}{\alpha}$
$\mathbb{R}$	$\cos(\alpha x),\ \alpha \neq 0$	$\dfrac{\sin(\alpha x)}{\alpha}$
$\mathbb{R}$	$\sin(\alpha x),\ \alpha \neq 0$	$-\dfrac{\cos(\alpha x)}{\alpha}$
$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	$\ln\lvert\sin x\rvert$
$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}\, x$
$]-1,1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\, x$

Puis les formes de primitive à reconnaître, u est une fonction dérivable ici: $u' \times f' \circ u$ a pour primitive $f \circ u$ (à une constante additive près).

Forme à reconnaître	**Expression primitive** (à une constante additive près)
$u'\,\mathrm{e}^u$	e^u
$u'u^\alpha$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$u'\,\mathrm{ch}\, u$	$\mathrm{sh}\, u$
$u'\,\mathrm{sh}\, u$	$\mathrm{ch}\, u$
$u'\sin u$	$-\cos u$
$u'\cos u$	$\sin u$
$u'(1+\tan^2 u) = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\mathrm{Arctan}\, u$
$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\, u$

I.2 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème (Lien entre primitive et intégrale)

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$.

1) L'application $\begin{array}{rccc} F: & I & \to & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est une primitive de f sur I c'est-à-dire F est dérivable sur I et $F' = f$.

2) Pour tout $C \in \mathbb{K}$, il existe une et une seule primitive F de f sur I telle que $F(a) = C$. F est définie par:

$$\forall x \in I, \quad F(x) = C + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème (Théorème fondamental de l'analyse)

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $(a,b) \in I^2$. Si F est **UNE** primitive de f sur I. Alors:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)}.$$

☞ **Explication** ☜ Ce théorème est fondamental car il établit le lien entre l'intégrale vue comme une aire avec la primitive. C'est LE théorème qui donne la méthode pour calculer une intégrale.

Remarques

- La dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est f
- Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Iet si a et x sont des réels de I alors
$$\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(a).$$
- **Notation**. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est parfois noté $\displaystyle\int_a^b f$.

Exemples

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2.$

2) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+\alpha}[t^{\alpha+1}]_0^1 = \frac{1}{1+\alpha}.$

3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^{2\pi} = 0.$

Exemples à connaître Calculer les primitives des fonctions suivantes

$$x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2} \qquad x \mapsto \frac{1}{x^2-a^2} \qquad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \text{où } a \in \mathbb{R}_+^*.$$

Théorème (Propriétés de l'intégrale)

Soient $(f, g) \in (\mathcal{C}(I, \mathbb{K}))^2$ et $(a, b) \in I^2$.

1) **Linéarité**. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.

2) **Positivité**. Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.

3) **Croissance**. Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

4) **Relation de Chasles**. Si $c \in I$ alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

5) **Majoration en valeur absolue**. Si $a \leqslant b$ alors $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$

I.3 Extension aux fonctions complexes

Définition (Intégrale d'une fonction à valeurs complexes)

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ et $(a, b) \in I^2$. Alors :

$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i} \int_a^b \mathrm{Im}(f).$$

⚠ **Attention** ⚠ L'intégrale d'une fonction à valeurs complexes ne peut plus être interprétée comme une aire.

Exemples Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^{\alpha t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha} \mathrm{e}^{\alpha x} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

II Deux formules de calculs de primitives/intégrales

II.1 Intégration par parties

Théorème (Intégration par parties (IPP))

Soient $(u, v) \in (\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}))^2$ où I est un intervalle.

- **Calcul d'une intégrale**. Soit $(a, b) \in I^2$,

$$\boxed{\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.}$$

- **Calcul d'une primitive**. Soit $x \in I$,

$$\boxed{\int^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = u(x)v(x) - \int^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Méthode pratique (Mise en oeuvre de l'intégration par parties)

On souhaite calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

- On reconnait f comme $f = u'v$.
- On pose explicitement $\begin{cases} u'(t) = \ldots & u(t) = \ldots \\ v(t) = \ldots & v'(t) = \ldots \end{cases}$
- ⚠ **Attention** ⚠ On vérifie et on mentionne la classe $\mathcal{C}^1$ des fonctions u et v.

Exemples

1) Calculer $\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. On pose $\begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^t & u(t) = \mathrm{e}^t \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{cases}$, alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et

$$\int_0^1 t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[t\,\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^1 - [\mathrm{e}^t]_0^1 = \mathrm{e}^1 - (\mathrm{e}^1 - 1) = 1.$$

2) Déterminer les primitives de $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc y admet des primitives. On calcule donc pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = \int^x 1 \times \ln(t)\,\mathrm{d}t$. On pose $\begin{cases} u'(t) = 1 & u(t) = t \\ v(t) = \ln t & v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$, alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\int^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = x\ln x - \int^x 1\,\mathrm{d}t = x\ln x - x + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{Les primitives de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ sont donc : } x \mapsto x\ln x - x + C \text{ où } C \in \mathbb{R}}$.

Exercice. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arctan} t\,\mathrm{d}t$.

Exercice. Déterminer une primitive de $t \mapsto t\cos(2t)$ sur $\mathbb{R}$.

II.2 Changement de variable

Théorème (Changement de variable)

Soient $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$, $(\alpha,\beta) \in I^2$ et $\varphi : [\alpha,\beta] \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$. Alors:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Méthode pratique (Mise en oeuvre du changement de variable)

Pour mettre en oeuvre le changement de variable $x = \varphi(t)$. On écrit: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$. Puis il y a deux façons d'utiliser ce changement de variable :

- **OU BIEN** l'intégrale apparaît sous la forme du membre de droite de la formule (intégrale en x) et alors on remplace x par $\varphi(t)$, $\mathrm{d}x$ par $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ et on remplace les bornes.
- **OU BIEN** l'intégrale apparaît sous la forme du membre de gauche de la formule (intégrale en t), on fait apparaître $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, et on exprime le reste en fonction de $\varphi(t)$ et on remplace les bornes.

Exemples

- Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ avec le changement de variable $x=\cos t$.
- Calculer $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{1+\sin t}$ avec le changement de variable $x=\sin t$.
- Calculer les primitives sur $]0,\pi[$, $\displaystyle\int^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$ à l'aide du changement de variable $u=\cos t$.
- Calculer les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int^{x} \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{t(1+\ln^2 t)}$ à l'aide du changement de variable $u=\ln t$.

III Méthodes de calculs

III.1 Intégration directe : "on voit une primitive"

☞ **Explication** ☜ Il s'agit d'intégrer directement à l'aide des primitives uselles (cf. formulaire).

Exemples

1) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}$, $\quad\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x$.

2) Calculer les primitives de $x\mapsto \sin x\sqrt{3+\cos x}$, $\quad x\mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

III.2 Calcul de $\displaystyle\int^{x} P(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$ où P polynômiale et $\alpha\in\mathbb{C}$.

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Calcul de $\displaystyle\int^{x} P(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$)**

On intègre par parties (plusieurs fois) pour abaisser le degré de P: on dérive le polynôme, on intègre l'exponentielle jusqu'à descendre le degré du polynôme à 0.

Exemple Calculer $\displaystyle\int_0^1 (x^2-x+1)\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

III.3 Calcul de $\displaystyle\int^{x} P(t)\cos(\beta t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int^{x} P(t)\sin(\beta t)\,\mathrm{d}t$ où P polynômiale et $\beta\in\mathbb{R}$.

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Calcul de $\displaystyle\int^{x} P(t)\cos(\beta t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int^{x} P(t)\sin(\beta t)\,\mathrm{d}t$)**

Deux méthodes :

- on intègre par parties pour abaisser le degré de P: on dérive le polynôme et on intègre la fonction trigonométrique jusqu'à descendre le degré du polynôme à 0

  OU BIEN

- on utilise les complexes en écrivant $\cos(\beta x)=\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\beta x}\right)$ ou $\sin(\beta x)=\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\beta x}\right)$ et on se ramène au calcul de $\displaystyle\int P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$.

Exemple Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(3x)\,\mathrm{d}x$.

III.4 Calcul de $\int^x e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,dt$, $\int^x e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,dt$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Calcul de $\int^x e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,dt$, $\int^x e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,dt$)**

Deux méthodes :

- on intègre par parties **deux fois** pour "retomber sur nos pieds": on dérive ou intégre indifféremment deux fois l'exponentielle et la fonction trigonométrique.

  OU BIEN

- on utilise les complexes en écrivant $\cos(\beta x) = \mathrm{Re}\left(e^{i\beta x}\right)$ ou $\sin(\beta x) = \mathrm{Im}\left(e^{i\beta x}\right)$ pour se ramener à l'intégration d'une exponentielle.

Exemple Calculer $\int_0^{\pi} e^x \cos(2x)\,dx$.

III.5 Calcul de $\int^x \cos^n t \sin^m t\,dt$ où $n, m \in \mathbb{N}$.

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Calcul de $\int^x \cos^n t \sin^m t\,dt$ où $n, m \in \mathbb{N}$)**

Deux cas :

- si n ou m est impair: on isole un sin ou un cos, celui qui porte la puissance impaire et on utilise $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ puis $\int \sin x \cos^p x\,dx = -\frac{1}{p+1}\cos^{p+1} x\,dx$ ou $\int \cos x \sin^p x\,dx = \frac{1}{p+1}\sin^{p+1} x\,dx$ selon les cas
- sinon on linéarise, via les formules d'Euler par exemple (cette deuxième méthode marche finalement dans tous les cas mais elle peut s'avérer plus longue quand le premier cas s'applique).

Exemples Calculer $\int_0^{\pi} \cos x \sin^3 x\,dx$, $\int_0^{\pi} \cos^2 x \sin^3 x\,dx$, $\int_0^{\pi} \cos^2 x \sin^2 x\,dx$.

III.6 Fonction fraction rationnelle simple

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Calcul de $\int^x \frac{dt}{(at+b)^n}$)**

Soient a, b deux réels $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, sur des intervalles adaptés :

$$\int^x \frac{dt}{at+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \qquad \int^x \frac{dt}{(at+b)^n} = \frac{1}{a}\frac{-1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}}.$$

Exemples Calculer les primitives de $x \mapsto \frac{1}{3x+5}$, $x \mapsto \frac{2x+1}{3x+5}$, $x \mapsto \frac{1}{(3x+2)^5}$, $x \mapsto \frac{1}{4x^2-4x+1}$, $x \mapsto \frac{3x+1}{4x^2-4x+1}$, $x \mapsto \frac{x^2-x+2}{4x^2-4x+1}$.

✎ Méthode pratique ✎ (Calcul de $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)(t-b)}$)

Soient a, b deux réels avec $a \neq b$. On décompose $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$ en éléments simples, c'est-à-dire que l'on déterminer deux réels α et β tels que:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b}.$$

Puis on intègre les deux fractions rationnelles.

Exemples Calculer les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x(x-1)}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2}$, $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$, $x \mapsto \dfrac{2x^2-3x+4}{x^2-3x+2}$.

✎ Méthode pratique ✎ (Calcul de $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{at^2+bt+c}$ où $\Delta < 0$)

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. On suppose que le discriminant de ax^2+bx+c est strictement négatif. On écrit ax^2+bx+c sous forme canonique et on se ramène à la forme $\dfrac{1}{s^2+\alpha^2}$.

Exemples Calculer les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+5}$, $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$, $x \mapsto \dfrac{2x^2-x+3}{x^2+x+1}$.

On a donc mis en évidence une méthode pour le calcul de primitives de fonctions de forme $x \mapsto \dfrac{P(x)}{ax^2+bx+c}$ où P est une fonction polynomiale.

✎ Méthode pratique ✎ (Calcul de $\displaystyle\int^x \frac{P(t)\,\mathrm{d}t}{at^2+bt+c}$)

- Si P est constant on est ramené à l'un des trois cas de figure vu ci-dessus selon le discriminant. Si $\Delta = 0$ c'est le premier cas avec $n = 2$, si $\Delta > 0$ c'est le deuxième cas on détermine alors les racines pour écrire le trinôme sous forme factorisée, si $\Delta < 0$ c'est le troisième cas.
- Si P est de degré 1. On fait apparaître la dérivée du dénominateur au numérateur.
- Si P est de degré 2. On fait apparaître le dénominateur au numérateur.