Les réponses aux questions doivent être soigneusement justifiées. La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale. Les **résultats** doivent être mis en évidence, **encadrés**. Vous pouvez sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que vous admettez les résultats non prouvés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} |j-i|$.

1) Calculer T_0, T_1, T_2.

2) Calculer T_n.

Exercice 2

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\qquad P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (x+1)^k$.

   -a- Exprimer $P(x)$, sans le symbole Σ, pour tout x réel.

   -b- En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n+1}{p+1} x^p$.

   -c- En développant l'expression $(x+1)^k$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \left(\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} \right) x^p$.

   On admet que deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si elles ont mêmes degré et mêmes coefficients. On a donc démontré grâce à 1)-b- et 1)-c-, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [\![0, n]\!]$,

$$(*) \qquad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

2) Retrouver le résultat de $(*)$ par récurrence sur l'entier n.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler l'expression de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

4) -a- À l'aide de la relation $(*)$, déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}$.

   -b- En déduire la valeur de $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans cette question on propose de retrouver la valeur de U_n.

   -a- Justifier, sans calculer les sommes, que: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k)^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3$.

   -b- **En déduire** que: $U_n = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} ((n-k)^3 + k^3)$.

   -c- En déduire la valeur de U_n.