Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |j-i|$.

1) T_n est une somme sur un rectangle. On écrit dans le tableau les valeurs de $|i-j|$ (j est l'indice de la colonne et i est l'indice de ligne).

$i \backslash j$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	1
2	2	1	0

et

$$\begin{cases} \boxed{T_0 = 0} \\ T_1 = 0+1+1+0 \ \boxed{T_1 = 2} \\ T_2 = 0+1+2+1+0+1+2+1+0 \ \boxed{T_2 = 8} \end{cases}$$

2) Pour le calcul de T_n, on découpe la somme selon les deux triangles (où $i \leqslant j$ et $j \leqslant i$) pour retirer la valeur absolue et on retire les termes de la diagonale (correspondants à $i = j$) que l'on a compté deux fois,

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (j-i) + \sum_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} (i-j) - \sum_{0 \leqslant i = j \leqslant n} (i-j) \\ &= 2S_n \end{aligned}$$

où $S_n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (j-i)$ et la deuxième somme est également S_n en échangeant les rôles de i et j. La troisième somme est nulle, car $i = j$ et donc $i - j = 0$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned} T_n &= 2\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j}(j-i)\right) \\ &= 2\sum_{j=0}^{n}\left((j+1)\frac{j+0}{2}\right) \quad \text{(somme des termes d'une suite arithmétique)} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n} j + \sum_{j=0}^{n} j^2\right) \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}\left(1 + \frac{2n+1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

NB : on aurait pu découper de cette manière

$$T_n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (j-i) + \sum_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (i-j) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}(j-i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}(j-i).$$

Exercice 2

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n}(1+x)^k$.

-a- On a reconnu la somme des termes d'une suite géométrique de raison $1+x$ de premier terme 1,

donc $\boxed{P(x) = \begin{cases} n+1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{(x+1)^n - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}}$.

NB: on n'oublie pas de distinguer les cas !

-b- Si $x \neq 0$, d'après 1)-a- et la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k - 1\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k\right) \quad \text{(le terme 1 correspond au terme pour } k=0) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{k-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(x) = \sum_{p=0}^{n}\binom{n+1}{p+1}x^p} \quad \text{(on a posé } p = k-1)$$

Si $x=0$, d'une part $P(0)=n+1$. D'autre part, $\displaystyle\sum_{p=0}^{0}\binom{n+1}{p+1}x^p=\binom{n+1}{1}0^0=n+1$.

Bilan: $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n+1}{p+1}x^p}$.

NB: là aussi, on n'oublie pas de distinguer les cas !

-c-

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}(1+x)^k=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}x^p\right)$$

$$\boxed{P(x)=\sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}\right)x^p}\quad\text{(somme sur un triangle)}$$

On admet que deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si elles ont mêmes degré et mêmes coefficients. On a donc démontré grâce à 1)-b- et 1)-c-, que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $p\in[\![0,n]\!]$,

$$(*)\quad \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}.$$

2) **Méthode 1** : la plus simple.
Soit $p\in\mathbb{N}$ (fixé une fois pour toutes). Puis pour $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant p$, on pose la propriété :

$$\mathcal{P}(n):\text{“}\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}\text{”}.$$

- **Initialisation**. Pour $n=p$,

$$\sum_{k=p}^{p}\binom{k}{p}=\binom{p}{p}=1\qquad\binom{p+1}{p+1}=1.$$

Donc $\mathcal{P}(p)$ vraie.

- **Hérédité**. Soit $n\in\mathbb{N}$, avec $n\geqslant p$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors au rang $n+1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p}&=\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}+\binom{n+1}{p}\\&=\binom{n+1}{p+1}+\binom{n+1}{p}\quad\text{(hypothèse de récurrence)}\\&=\binom{n+2}{p+1}\quad\text{(formule du triangle de Pascal).}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

- **Conclusion**. $\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}\text{, tel que } n\geqslant p\ \displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}}$.

Méthode 2 : qui corrige ce que vous avez fait dans vos DM. Ici, on ne poser pas p en amont mais dans la propriété de récurrence.
Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose la propriété:

$$\mathcal{P}(n):\text{“}\boxed{\forall p\in[\![0,n]\!]},\quad\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}\text{”}$$

- **Initialisation**. Au rang 0, soit $p\in[\![0,0]\!]$, c'est-à-dire $p=0$,

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{k}{0}=\binom{0}{0}=1\qquad\binom{0+1}{0+1}=1.$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.

- **Hérédité**. Soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On distingue deux cas selon que $p=n+1$ ou $p\in[\![0,n]\!]$.
  - Si $p\in[\![0,n]\!]$, qui nous permettra d'utiliser l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p}&=\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}+\binom{n+1}{p}\\&=\binom{n+1}{p+1}+\binom{n+1}{p}\quad\text{(hypothèse de récurrence)}\\&=\binom{n+2}{p+1}\quad\text{(formule du triangle de Pascal).}\end{aligned}$$

– Si $p = n+1$

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=n+1}^{n+1} \binom{k}{n+1} = \binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n+2}{n+2} = \binom{n+2}{p+1}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

- **Conclusion**. $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } p \in [\![0,n]\!], \ \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$ et $\boxed{T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

4) -a- Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 3$,

$$\binom{k}{3} = \frac{k!}{3!(k-3)!} = \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)!}{6(k-3)!} \text{ donc } \boxed{\binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}}.$$

NB : attention cette relation n'est valable qu'à partir de $k \geqslant 3$, ce qu'il fallait bien gérer dans votre DM. Il faudra donc gérer correctement plus tard les cas $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$.

Soit $n \geqslant 3$. D'après la relation $(*)$, avec $p = 3$, $\sum_{k=3}^{n} \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4}$. Notons que:

$$\binom{n+1}{4} = \frac{(n+1)!}{4!(n-3)!} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)!}{24(n-3)!} \text{ donc } \boxed{\binom{n+1}{4} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}}.$$

NB : attention cette relation n'est valable qu'à partir de $n \geqslant 3$, ce qu'il fallait bien gérer dans votre DM. Il faudra donc gérer correctement plus tard les cas $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.

Donc d'après 4)-a-, il découle:

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{k(k-1)(k-2)}{6} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}.$$

Notons que pour $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ les termes de la somme sont nuls, on peut donc démarrer la somme à $k = 0$, puis on simplifie pour obtenir: $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}$.

Puis, pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, l'égalité précédente est vraie (donne $0 = 0$).

On a donc bien $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}}$.

-b- Soit $n \in \mathbb{N}$, tout d'abord:

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2) = \sum_{k=0}^{n} (k^3 - 3k^2 + 2k) = U_n - 3T_n + 2S_n = U_n - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + n(n+1).$$

Donc en isolant U_n, on a d'après 4)-b-,

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - n(n+1) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} \\ &= \frac{n(n+1)}{4}\left(2(2n+1) - 4 + (n-1)(n-2)\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{4}(n^2+n) \end{aligned}$$

$$\boxed{U_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$.

-a- Le changement d'indice $j = n - k$ donne $\sum_{k=0}^{n} (n-k)^3 = \sum_{j=n}^{0} j^3 = U_n$.

On a donc bien $\boxed{\sum_{k=0}^{n} (n-k)^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3}$.

-b- On a $U_n = \frac{1}{2}(U_n + U_n)$, donc par définition de U_n et d'après 5)-a-, $\boxed{U_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} ((n-k)^3 + k^3)}$.

-c- On en déduit:

$$\begin{aligned}
U_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}((n^3 - 3n^2k + 3nk^2 - k^3) + k^3) \\
&= \frac{1}{2}(n^3(n+1) - 3n^2 S_n + 3nT_n) \\
&= \frac{1}{2}\left(n^3(n+1) - 3n^2\frac{n(n+1)}{2} + 3n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= \frac{n^2(n+1)}{4}\left(2(n+1) - 3n + 2n + 1\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{U_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$