Les réponses aux questions doivent être soigneusement justifiées. La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale. Les **résultats** doivent être mis en évidence, **encadrés**. Vous pouvez sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que vous admettez les résultats non prouvés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Exercice 1. Questions indépendantes

1) Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2 + x^\alpha} - \sqrt{x^2+1}$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) Calculer la limite en $+\infty$ de $g(x) = \dfrac{a^{b^x}}{b^{a^x}}$ en fonction de $1 < a < b$.

Exercice 2

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos(3\theta) = \cos(2\theta)$.

2) Soit θ réel, exprimer $\cos(2\theta)$ et $\cos(3\theta)$ uniquement à l'aide de $\cos\theta$.

3) Montrer que l'équation (E) est équivalente à $P(X) = 0$ où $X = \cos\theta$ et P une fonction polynomiale à préciser.

4) Déterminer les solutions de $P(X) = 0$.

5) Déduire ce qui précède les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, puis $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Exercice 3

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation (E_1) $\dfrac{1 - \mathrm{i}\,z}{1 + \mathrm{i}\,z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On donnera le résultat sous la forme la plus simplifiée possible.

2) En utilisant 1), résoudre l'équation (E_2) $(1 + \mathrm{i}\,z)^{2n+1} = (1 - \mathrm{i}\,z)^{2n+1}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

3) Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = (1 + \mathrm{i}\,z)^{2n+1} - (1 - \mathrm{i}\,z)^{2n+1}$.

   Montrer que $P(z)$ s'écrit de la forme $P(z) = \lambda \displaystyle\prod_{k=0}^{2n} (z - z_k)$ où λ, $z_0, \ldots, z_{2n}$ sont des complexes à déterminer.

4) En utilisant ce qui précède, déduire une valeur simple pour le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} \tan \frac{k\pi}{2n+1}$.

Exercice 4. Facultatif Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}\right)^n = n(z^n + 1)$.

2) En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = 0$.