La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale :

- chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie
- chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément un théorème du cours avec ses hypothèses exactes ou en citant le numéro d'une question précédente du problème
- toute question amène une réponse qui doit être encadrée
- les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrase en français
- les notations de l'énoncé doivent être respectées
- les copies doivent être numérotées
- on peut sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que l'on admet les résultats non prouvés
- on peut traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Exercice 1. Système linéaire

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ $\begin{cases} 2x + (m+1)y + (m-1)z = m+1 \\ x + my - z = 1 \\ 3x + (m+2)y + (m-2)z = m+2 \end{cases}$ où m est un paramètre réel.

Exercice 2

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} 3^{2k}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{(k+2)!}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k3^k$. On dérivera de deux manières la fonction $f_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ sur $]1, +\infty[$.

4) Soit (F_n) la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

   Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{2p-k}{k} = F_{2p+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1-k}{k} = F_{2p+2}$.

Exercice 3. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ des réels. On veut démontrer que :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $f(\lambda) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k + y_k)^2$.

On pose aussi $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$, $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k^2$ et $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, développer $f(\lambda)$, exprimer le résultat en fonction de λ, a_n, b_n et c_n.

2) Quel est le signe de f ? En déduire l'inégalité demandée.

3) Application : démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$.

Exercice 4
Dans cet exercice, on définit la fonction f par $f : x \mapsto \ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)$, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1) Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Puis, étudier la continuité et la dérivabilité de f.

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(x) + f(-x)$. Que peut-on en déduire?

3) Calculer la limite de f en $+\infty$, puis en $-\infty$.

4) Calculer la dérivée de f puis dresser le tableau de variations complet de f.

5) -a- Montrer que: $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) - (\ln x + 2\ln 2) = \ln\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + \dfrac{1}{4x^2}}\right)$.

   -b- Calculer la limite de $f(x) - (\ln x + 2\ln 2)$ en $+\infty$.

   -c- On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \ln x + 2\ln 2$. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

6) Tracer les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_f$. On tiendra compte des informations précédentes et on placera le point d'abscisse 0 de $\mathcal{C}_f$ et sa tangente. On utilisera les valeurs approchées: $\ln(2) \approx 0.7$, $\ln(2+\sqrt{5}) \approx 1.5$ pour placer les points d'abscisse 1.

7) -a- Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à préciser.

   -b- Déterminer l'expression de la bijection réciproque de f.

Exercice 5 On donne pour cet exercice la définition suivante : une fonction f est **minorée** par une fonction g sur un intervalle I si : $\forall\, x \in I,\ g(x) \leqslant f(x)$. Dans tout l'exercice, on posera $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ et on étudiera certaines fonctions minorant f, ou minorées par f, sur $[0, +\infty[$.

Pour tout réel k, on définit une fonction f_k par $f_k : x \longmapsto \ln(1+x) - kx$.

1) Étudier les variations et les limites de $f_1 : x \longmapsto \ln(1+x) - x$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2) Montrer que la fonction identité $x \longmapsto x$ est minorée par f sur $[0, +\infty[$, et en déduire plus généralement que $\forall\, k \geqslant 1$, la fonction $x \longmapsto kx$ est minorée par f.

3) On suppose désormais que $k \in]0, 1[$, montrer que la dérivée de f_k s'annule alors pour $x = \dfrac{1-k}{k}$.

4) En déduire les variations de f_k (toujours lorsque $k \in]0, 1[$). On ne demande pas les limites de la fonction f_k.

5) Montrer que f_k admet un maximum sur $[0, +\infty\,[$. Quel est son signe?

6) En déduire les valeurs de k pour lesquelles $x \longmapsto kx$ est minorée par f.