Exercice 1 Notons (S) le système. On utilise la méthode du pivot de Gauss.

$L_1 \leftrightarrow L_2$ donne

$$(S) \iff \begin{cases} x + my - z = 1 \\ 2x + (m+1)y + (m-1)z = m+1 \\ 3x + (m+2)y + (m-2)z = m+2 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$(S) \iff \begin{cases} x + my - z = 1 \\ (1-m)y + (m+1)z = m-1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2(1-m)y + (m+1)z = m-1 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} x + my - z = 1 \\ (1-m)y + (m+1)z = m-1 \\ -(m+1)z = -(m-1) & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

<u>1^{er} cas:</u> $m=-1$

$$(S) \iff \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2y + 0z = -2 \\ 0z = 2 \end{cases}$$

$0=2$. Le système est incompatible.

<u>$2^{\text{ième}}$ cas:</u> $m=1$

$$(S) \iff \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 0 \end{cases}$$

C'est la droite passant par $A(1,0,0)$ et dirigée par $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>$3^{\text{ième}}$ cas:</u> $m \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$

$$(S) \iff \begin{cases} x = 1 + \dfrac{m-1}{m+1} = \dfrac{2m}{m+1} \\ y = 0 & \text{car } 1-m \neq 0 \\ z = \dfrac{m-1}{m+1} & \text{car } m+1 \neq 0 \end{cases}$$

Le système admet une unique solution.

En notant $\mathcal{S}$ l'ensemble-solution du système, on a

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } m \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\},\ \mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{2m}{m+1}, 0, \dfrac{m-1}{m+1}\right)\right\}. \\ \text{Si } m=-1,\ \mathcal{S} = \emptyset. \\ \text{Si } m=1,\ \mathcal{S} = \left\{(1-y,y,0) \;\middle|\; y \in \mathbb{R}\right\}. \end{array}}$$

Exercice 2

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} 3^{2(j-1)} \quad \text{(on a posé } j=k+1\text{)} \\ &= \frac{1}{9} \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} 9^j \\ &= \frac{1}{9} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 9^j 1^{n-j} - \binom{n}{0} 9^0 - \binom{n}{1} 9^1 \right) \\ &= \frac{1}{9} \left((9+1)^n - 1 - 9n \right) \quad \text{(formule du binôme de Newton)} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{9}\left(10^n - 1 - 9n\right)}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+2)-1}{(k+2)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!} \right) \\ &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+2)!} \quad \text{(somme télescopique)} \end{aligned}$$

$$\boxed{T_n = 1 - \frac{1}{(n+2)!}}.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$ est polynomiale donc est dérivable sur $]1, +\infty[$.
Puis, en reconnaissant une somme géométrique, on a pour $x > 1$ (x est bien différent de 1),

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

On dérive les deux expressions obtenues, pour $x > 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + 1}{(1-x)^2}.$$

On évalue en 3,

$$\sum_{k=1}^{n} k3^{k-1} = \frac{-(n+1)3^n + n3^{n+1} + 1}{4}.$$

Donc en multipliant par 3,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k3^k = \frac{-(n+1)3^{n+1} + n3^{n+2} + 3}{4}}.$$

Exercice 3

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda^2 x_k^2 + y_k^2 + 2\lambda x_k y_k\right) \\ &= \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \quad \text{(linéarité de la somme)} \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda) = a_n\lambda^2 + 2\lambda c_n + b_n.}$

2) Si tous les x_k sont nuls, alors l'inégalité est vraie car elle devient $0 \leqslant 0$.

Sinon, il existe au moins un des x_k qui est non nul et alors la somme $a_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ est strictement positive, en particulier non nulle.

La fonction f est donc une fonction polynomiale du second degré, qui est toujours positive ou nulle, car $f(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} (x_k\lambda + y_k)^2$ est une somme de carrés de réels, donc de nombres positifs ou nuls.
f est une fonction polynomiale du second degré et de signe constant, le discriminant Δ de f vérifie donc $\Delta \leqslant 0$. Or on a $\Delta = 4c_n^2 - 4a_nb_n$, ce qui donne, $c_n^2 \leqslant a_nb_n$ et donc par croissance de la fonction racine carrée, on a $\sqrt{c_n^2} \leqslant \sqrt{a_n}\sqrt{b_n}$. Comme $\sqrt{c_n^2} = |c_n|$, on obtient bien le résultat.

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.}$$

3) On pose pour $k \in [\![1, n]\!], x_k = \sqrt{k}$ et $y_k = 1$.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

et

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \times \sqrt{n} = n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne bien $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant n\sqrt{\frac{n+1}{2}}.}$

Exercice 4 Dans cet exercice, on définit la fonction f par $f : x \mapsto \ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)$, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4x^2 + 1 \geqslant 0$ donc $x \mapsto \sqrt{4x^2+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4x^2 + 1 > 4x^2$ donc par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{4x^2+1} > |2x|$. Or $|2x| \geqslant -2x$ donc $\sqrt{4x^2+1} > -2x$ donc $2x + \sqrt{4x^2+1} > 0$. Et comme ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$.

$\left|\begin{array}{l} x \mapsto 4x^2+1 \text{ est continue, dérivable sur } \mathbb{R} \text{ à valeur dans } \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \sqrt{x} \text{ est continue, dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \end{array}\right.$ donc par composition $x \mapsto \sqrt{4x^2+1}$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.

Puis par somme avec $x \mapsto 2x$ continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, il vient $x \mapsto 2x+\sqrt{4x^2+1}$ continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Or $x \mapsto \ln(x)$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+$, donc par composition f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x)+f(-x) &= \ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)+\ln\left(-2x+\sqrt{4(-x)^2+1}\right) \\ &= \ln\left(\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\left(-2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\right) \\ &= \ln\left(-(2x)^2+(\sqrt{4x^2+1}))^2\right) \\ &= \ln(-4x^2+1+4x^2) = \ln(1) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x)+f(-x)=0}.$$

Donc $f(-x)=-f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

3) On a $\begin{cases} 4x^2+1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ \sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{cases}$ donc par composition $\sqrt{4x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Puis par somme avec $x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il vient $x+\sqrt{4x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Or $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc par composition $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

Par imparité, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$

4) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x)=\frac{2+\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}}{x+\sqrt{4x^2+1}}=\frac{2\sqrt{4x^2+1}+4x}{(x+\sqrt{4x^2+1})\sqrt{4x^2+1}}=\frac{2(\sqrt{4x^2+1}+2x)}{(x+\sqrt{4x^2+1})\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}}>0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	$+$	
f	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

5) -a- Soit $x \in]0,+\infty[$,

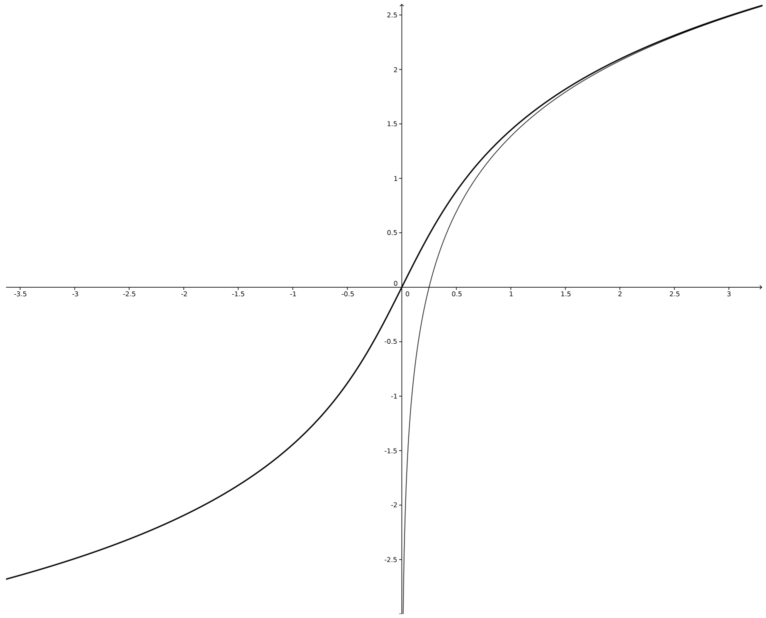
$$\begin{aligned} f(x)-(\ln x+2\ln 2) &= \ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)-\ln(4x)=\ln\left(\frac{2x+\sqrt{4x^2+1}}{4x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4x^2+1}{4x^2}}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x)-(\ln x+2\ln 2)=\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}\right)}.$$

-b- On a $\begin{cases} \dfrac{1}{4x^2}+1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \\ \sqrt{x} \underset{x\to1}{\longrightarrow} 1 \end{cases}$ donc par composition $\sqrt{\dfrac{1}{4x^2}+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc par combinaison linéaire, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{1}{4x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Or $\ln(x) \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0$ donc par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(\ln x+2\ln 2))=0}$.

-c- On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y=\ln x+2\ln 2$.
Pour étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on étudier le signe de $f(x)-(\ln+2\ln 2)$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $1+\dfrac{1}{4x^2} \geqslant 1$ donc par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, il vient $\sqrt{1+\dfrac{1}{4x^2}} \geqslant 1$. Donc par multiplication par $\dfrac{1}{2}$ et somme de $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{1}{4x^2}} \geqslant 1$. Par croissance de ln, il vient $f(x)-(\ln+2\ln 2) \geqslant 0$. Donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathcal{C} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.

6) Graphique



7) -a- $\mathbb{R}$ est un intervalle. Puis d'après 1), f est continue sur $\mathbb{R}$ et d'après 4) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ($f' > 0$). Donc d'après le theorème de la bijection monotone, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ vers } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \text{ (d'après les limites calculées en 3))}}$.

-b- Soit $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^y = 2x + \sqrt{4x^2+1} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^y - 2x = \sqrt{4x^2+1}. \end{aligned}$$

Disjonction de cas:

- Si $\mathrm{e}^y - 2x < 0$, comme $\sqrt{4x^2+1} \geqslant 0$ alors l'équation $y = f(x)$ n'admet pas de solution.
- Si $\mathrm{e}^y - 2x \geqslant 0$, alors comme aussi $\sqrt{4x^2+1} \geqslant 0$, on peut élever au carré,

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow (\mathrm{e}^y - 2x)^2 = (\sqrt{4x^2+1})^2 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2y} - 4x\,\mathrm{e}^y + 4x^2 = 4x^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow 4x\,\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{2y} - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\mathrm{e}^{2y} - 1}{4\,\mathrm{e}^y}. \end{aligned}$$

Enfin, on confronte à la condition $\mathrm{e}^y - 2x \geqslant 0$. On a:

$$\mathrm{e}^y - 2x = \mathrm{e}^y - \frac{\mathrm{e}^{2y} - 1}{2\,\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^y - \frac{\mathrm{e}^y}{2} + \frac{1}{2\,\mathrm{e}^y} = \frac{\mathrm{e}^y}{2} + \frac{1}{2\,\mathrm{e}^y} \geqslant 0.$$

La condition $\mathrm{e}^y - 2x \geqslant 0$ est donc bien vérifiée. D'où l'expression de la réciproque,

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \frac{\mathrm{e}^{2y} - 1}{4\,\mathrm{e}^y}}.$$

Exercice 5

1) Soit k un réel.
La fonction f_k est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont :

- la fonction f est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que composée de la fonction $x \longmapsto 1 + x$, définie, dérivable et à valeurs strictement positives sur $[0, +\infty[$, par la fonction logarithme, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$;
- la fonction $x \longmapsto -x$ est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ f_1'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

Nous en déduisons que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ f_1'(x) \leqslant 0$: $\boxed{\text{la fonction } f_1 \text{ est donc décroissante sur } \mathbb{R}_+}$.

Remarquons que :

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_1(x) &= x\left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right)\\
&= x\left(\frac{\ln\left(x\left(\dfrac{1}{x}+1\right)\right)}{x} - 1\right)\\
&= x\left(\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)}{x} - 1\right)
\end{aligned}$$

Comme $\left.\begin{array}{lcl} \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right) & = & 1\\ \displaystyle\lim_{y\to 1}\ln(y) & = & 0\end{array}\right\}$, alors par composition des limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{x}+1\right) = 0$.

Nous en déduisons alors par quotient que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)}{x} = 0$. Or, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$, et donc par somme de limites finies, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)}{x} - 1\right) = -1$. Nous en concluons par produit que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty}$.

Enfin, $f_1(0) = 0 - 0$, et donc $\boxed{f_1(0) = 0}$.

2) D'après la question précédente, f_1 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f_1(0) = 0$. Nous en déduisons que f_1 est négative sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) \leqslant x.$$

Ceci entraîne que $\forall\, k \in [1, +\infty[,\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) \leqslant kx$, puisque

$$\forall\, k \in [1, +\infty[,\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ x \leqslant kx.$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } \forall\, k \geqslant 1, \text{ la fonction } x \longmapsto kx \text{ est minorée par } f}$.

3) Supposons désormais que $k \in]0,1[$. La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ - comme nous l'avons déjà montré - et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ f_k'(x) = \frac{1}{1+x} - k = \frac{1-k-kx}{1+x}.$$

Soit x un réel positif,

$$\begin{aligned}
f_k'(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1-k-kx}{1+x} = 0\\
&\Longleftrightarrow \quad 1-k-kx = 0 \ \ (\text{car } x \geqslant 0)\\
&\Longleftrightarrow \quad x = \frac{1-k}{k}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La dérivée de } f_k \text{ s'annule bien pour } x = \dfrac{1-k}{k}}$. Remarquons que le fait que k appartienne à $]0,1[$ entraîne que $\dfrac{1-k}{k}$ soit positif.

4) Puisque $-k \leqslant 0$, alors $\forall\, x \in \left[0, \dfrac{1-k}{k}\right[,\ f_k'(x) > 0$ et $\forall\, x \in \left]\dfrac{1-k}{k}, +\infty\right[,\ f_k'(x) < 0$.

$\boxed{\text{La fonction } f_k \text{ est donc strictement croissante sur } \left[0, \dfrac{1-k}{k}\right] \text{ et strictement décroissante sur } \left[\dfrac{1-k}{k}, +\infty\right[}$.

x	0		$\frac{1-k}{k}$		$+\infty$
f_k	0	$\nearrow$	m	$\searrow$	$-\infty$

La limite en $+\infty$ reste égale à $-\infty$, mais comme le conseillait l'énoncé, nous ne la détaillerons pas.

5) Puisque $f_k(0) = 0$, alors d'après les variations strictes obtenues à la question précédente, la fonction $\boxed{f_k \text{ admet un maximum sur } [0, +\infty[}$.

6) Nous voyons sur le tableau de variation de f_k obtenu à la fin de la question 4. qu'elle ne garde pas un signe négatif sur $\mathbb{R}^+$ lorsque $k \in]\,0, 1[$, et donc que la fonction $x \longmapsto kx$ ne majore pas f dans ce cas. C'est bien sûr encore moins le cas si $k \leqslant 0$ puisque la fonction f_k est alors positive sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont.

En conclusion, pour tout k appartenant à $\mathbb{R}$, $\boxed{f \text{ minore } x \longmapsto kx \text{ si et seulement si } k \geqslant 1.}$