Exercice 1. (♡)Les démonstrations du cours non traitées (ne sera pas corrigé en TD)
Prouver:

1) la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} k^2$ (par récurrence)

2) la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} k^3$ (par récurrence et par téléscopage)

Correction -

1) Posons pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$:" $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$".

- **Initialisation**. Pour $n = 0$, $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0$ et $\frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors au rang $n+1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{(HR)}\\ &= \frac{n+1}{6}\left(2n^2+n+6n+6\right) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad \text{donc } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie.}\end{aligned}$$

- **Conclusion**. $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

2) On calcule de deux façons la somme, $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^4 - k^4)$.

- D'une part, pour $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)^4 - k^4 = (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ (on a développé $(1+k)^4$ à l'aide de la formule du binôme et obtenu les coefficients à l'aide du triangle de Pascal). Donc par linéarité:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}((k+1)^4 - k^4) &= 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + (n+1)\\ &= 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + (n+1) \quad (*)\end{aligned}$$

- D'autre part, par téléscopage [*détails laissés au lecteur*], $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^4 - k^4) = (n+1)^4 - 0^4 = (n+1)^4 \quad (*)$.

On rapproche alors $(*)$ et $(**)$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^3 &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)\right)\\ &= \frac{n+1}{4}\left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1\right)\\ &= \frac{n(n+1)}{4}\left(n^2+n\right) \quad \text{Donc } \boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}\end{aligned}$$

Exercice 2. (♡)

3)-c- $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2$ 4)-d $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k!$ 4)-e $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

Correction -

3)-c- On effectue une disjonction de cas selon la parité de n.

► Si n est pair, posons $n = 2N$ où $N \in \mathbb{N}^*$. Alors, regroupant les termes selon les k pairs et impairs, il vient:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{\substack{k=1\\k \text{ pair}}}^{2N} k^2 - \sum_{\substack{k=1\\k \text{ impair}}}^{2N} k^2 \\
&= \sum_{p=1}^{N} 4p^2 - \sum_{p=1}^{N}(4p^2 - 4p + 1) \qquad (k = 2p \text{ et } k = 2p-1 \text{ dans la première et la deuxième somme respectivement}) \\
&= \sum_{p=1}^{N}(4p-1) \qquad \text{(par linéarité)} \\
&= \frac{3 + (4N-1)}{2}N \qquad \text{(somme des termes d'une suite arithmétique)} \\
&= (2N+1)N \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \text{ en utilisant } N = \tfrac{n}{2}.
\end{aligned}$$

► Si n est impair, posons $n = 2N + 1$ où $N \in \mathbb{N}$. Alors, regroupant les termes selon les k pairs et impairs, il vient:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{\substack{k=1\\k \text{ pair}}}^{2N+1} k^2 - \sum_{\substack{k=1\\k \text{ impair}}}^{2N+1} k^2 \\
&= \sum_{p=1}^{N} 4p^2 - \sum_{p=1}^{N+1}(4p^2 - 4p + 1) \qquad (k = 2p \text{ et } k = 2p-1 \text{ dans la première et la deuxième somme respectivement}) \\
&= \sum_{p=1}^{N}(4p-1) - (4(N+1)^2 - 4(N+1) + 1) \qquad \text{(par linéarité)} \\
&= \frac{3 + (4N-1)}{2}N - (4N^2 + 4N + 1) \qquad \text{(somme des termes d'une suite arithmétique)} \\
&= -2N^2 - 3N - 1 \\
&= -(2N+1)(N+1) \\
&= -\frac{n(n+1)}{2} \text{ en utilisant } N = \tfrac{n-1}{2}.
\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = (-1)^n \dfrac{n(n+1)}{2}}$.

4)-d- $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n}((k+1) - k) \times k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!$.

On reconnait alors un téléscopage, et donc $\boxed{S_n = (n+1)! - 1}$.

4)-e- $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!}$.

On reconnait alors un téléscopage, et donc $\boxed{S_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}}$.

Exercice 3. (♡) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$. [On pourra faire apparaître un téléscopage...]

Correction -

$$\begin{aligned}
P_n &= \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) \\
&= \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n} k \prod_{k=2}^{n} k} = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod_{k=2}^{n} k}\frac{\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n} k} \\
&= \frac{1}{n}\frac{n+1}{2} \qquad \boxed{P_n = \frac{n+1}{2n}}.
\end{aligned}$$

Exercice 4. (∗) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$.

2) En déduire la valeur de la somme S_n.

Correction -

1) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2}=\frac{a(k+1)(k+2)+bk(k+2)+ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{(a+b+c)k^2+(3a+2b+c)k+2a}{k(k+1)(k+2)}.$$

On souhaite l'égalité à $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$, on pose le système:

$$\begin{cases} a & +b & +c & =0 \\ 3a & +2b & +c & =0 \\ 2a & & & =1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} & b & +c & =-\frac{1}{2} \\ & 2b & +c & =-\frac{3}{2} \\ a & & & =\frac{1}{2} \end{cases} \left| \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ \end{matrix} \right| \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ \end{matrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ c=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

On déduit:

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}}.$$

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}\right) && (\text{ d'après 1) }) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) && (\text{linéarité}) \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right) && (\text{téléscopage}) \\ &= \frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)-2(n+2)+2(n+1)}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}$$

Exercice 7. $(**)$ Soit $a\in]0,1[$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{(1-a^k)(1-a^{k+1}}$ que l'on souhaite calculer. En calculant $(1-a)S_n$ faire apparaître une somme téléscopique.

Correction - Soit $a\in]0,1[$ et $n\in\mathbb{N}^*$,

$$(1-a)S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-a)a^k}{(1-a^k)(1-a^{k+1})}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k-a^{k+1}}{(1-a^k)(1-a^{k+1})}.$$

Notons que, $\dfrac{1}{1-a^k}-\dfrac{1}{1-a^{k+1}}=\dfrac{a^k-a^{k+1}}{(1-a^k)(1-a^{k+1})}$. Donc,

$$(1-a)S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-a^k}-\frac{1}{1-a^{k+1}}\right)=\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-a^{n+1}}.$$

Donc, $\boxed{S_n=\dfrac{1}{(1-a)^2}-\dfrac{1}{(1-a^{n+1})(1-a)}}$.

Exercice 10. $(\heartsuit)$ Montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k!\leqslant(n+1)!$.

Correction - Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour majorer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k!$, on majore chaque terme de la somme. Ici, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $k!\leqslant n!$. Donc en sommant,

$$\sum_{k=1}^{n}k!\leqslant\sum_{k=1}^{n}n!=n\times n!\leqslant(n+1)n!=(n+1)!\qquad\boxed{\sum_{k=1}^{n}k!\leqslant(n+1)!}.$$

Exercice 11. $(*)$ Montrer, par récurrence, que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dbinom{2n}{n} \geqslant \dfrac{4^n}{2n+1}$.

Correction - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n)$: "$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2n+1}$".

- **Initialisation**. Pour $n = 1$, $\binom{2}{1} = 2$ et $\frac{4^1}{2+1} = \frac{4}{3} < 2$ donc $\mathcal{P}(1)$ vraie.
- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, alors au rang $n+1$,

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}\frac{(2n)!}{n!^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Or par hypothèse de récurrence, $\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2n+1}$, donc

$$\binom{2(n+1)}{n+1} \geqslant \frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{4^n}{2n+1} = \frac{2\times 4^n}{n+1} = \frac{4\times 4^n}{2(n+1)} = \frac{4^{n+1}}{2n+2} \geqslant \frac{4^{n+1}}{2n+3}.$$

On a donc démontré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion**. $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2n+1}}$.

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

4) $(*)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

Correction -

4) Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$. Pour $n = 0$ et $n = 1$ la somme vaut 0. Prenons donc $n \geqslant 2$, on remarque que la somme S_n peut partir de $k = 2$ car les deux premiers termes (pour $k = 0$ et $k = 1$) sont nuls. En appliquant deux fois la formule du sélectionneur,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}.$$

On effectue le changement d'indice $j = k-2$,

$$S_n = n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j} = n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}1^j 1^{n-2-j} \qquad \boxed{S_n = n(n-1)2^{n-2}}.$$

Puis pour le calcul de $T_n = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$, on utilise $k^2 = k(k-1)+k$ et donc par linéarité puis en reconnaissant S_n et la somme de 2):

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} \qquad \boxed{T_n = n(n+1)2^{n-2}}.$$

Exercice 14. $(*)$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$.

1) En effectuant le changement d'indice $j = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n.
2) En déduire la valeur de $2S_n$, puis celle de S_n.

Correction - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$.

1) En effectuant le changement d'indice $j = 2n+1-k$, on obtient:

$$S_n = \sum_{j=n+1}^{2n}\binom{2n+1}{2n+1-j} = \sum_{j=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{j} \quad \text{(formule de symétrie).}$$

Et donc:

$$S_n = \sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j} - \sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{j} = 2^{2n+1} - S_n.$$

2) D'où $2S_n = 2^{2n+1}$ c'est-à-dire $\boxed{S_n = 2^{2n}}$.

Exercice 15. ($**$) Soient n, p, q des entiers naturels tels que $n \leqslant p+q$.
En développant de deux manières différentes $(1+x)^p(1+x)^q$ calculer la somme : $S_n(p,q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$.
Rappel : l'égalité de deux fonctions polynomiales entraine l'égalité des coefficients.

Correction - Soit $x \in \mathbb{R}$. On détermine le coefficient devant x^n dans $(1+x)^p(1+x)^q$. D'une part,

$$(1+x)^p(1+x)^q = (1+x)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} x^k.$$

Le coefficient devant x^n est $\binom{p+q}{n}$.
D'autre part,

$$(1+x)^p(1+x)^q = \left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} x^k\right).$$

Les termes de degré n de ce produit sont obtenus en multipliant x^k dans la première somme par x^{n-k} dans la deuxième somme avec $0 \leqslant k \leqslant n$, les coefficients obtenus sont $\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$, avec $0 \leqslant k \leqslant n$. On somme tous ces coefficients pour obtenir le coefficient devant x^n, soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$. On identifie alors les coefficients obtenus dans chacun de ces calculs, $\boxed{\binom{p+q}{n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}}$.

Exercice 16. ($**$) Soient k, p et n entiers naturels vérifiant $p \leqslant k \leqslant n$.

1) Montrer que $\binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \binom{n}{k}\binom{k}{p}$.
2) En déduire la valeur des sommes:

$$S = \sum_{p=0}^{k} \binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} \qquad T = \sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p}.$$

Correction - Soients k, p et n entiers naturels vérifiant $p \leqslant k \leqslant n$.

1) Pour montrer $\binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \binom{n}{k}\binom{k}{p}$, il suffit de revenir à la définition des coefficients binomiaux à l'aide de factorielles [...l'écrire...]
2) On déduit

$$S = \sum_{p=0}^{k} \binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{k}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p} \qquad \boxed{S = \binom{n}{k}2^k}.$$

$$T = \sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \binom{n}{p}\sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n-p}{k-p}.$$

On effectue le changement d'indice $j = k-p$,

$$T = \binom{n}{p}\sum_{j=0}^{n-p} (-1)^{j+p}\binom{n-p}{j} = (-1)^p\binom{n}{p}\sum_{j=0}^{n-p}\binom{n-p}{j}(-1)^j 1^{n-p-j} = (-1)^p\binom{n}{p}(1-1)^{n-p}.$$

Donc $\boxed{T = \begin{cases} (-1)^p\binom{n}{p} = (-1)^n & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$.

Sommes doubles

Exercice 17. ($\heartsuit$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes:

1) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i$
2) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i$
3) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+1)^2$
4) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (i+j)$
5) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (ij)$
6) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$

Correction -

1) $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$
2) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$
3) $\dfrac{n^2(2n^2+9n+13)}{6}$
4) $\dfrac{n(n+1)^2}{2}$
5) $\dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$
6) $\dfrac{n(n+3)}{4}$

Exercice 18. $(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes:

1) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$
2) $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \binom{i}{j}$

Correction -

1) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$. L'objectif étant de remplacer $\max(i,j)$ par i ou j selon que $i \leqslant j$ ou $i > j$, cela nous amène à découper cette somme sur un rectangle en une somme sur deux triangles,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} i \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} j + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} i \\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{i=2}^{n}(i^2-i) \text{ on peut faire partir cette dernière somme de 1 car le terme obtenu est nul} \\
&= 2\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} \qquad \boxed{S_n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}}
\end{aligned}$$

Autre méthode : on peut ruser davantage pour ne pas avoir à gérer la somme sur le triangle où $i > j$. On considère les deux sommes sur les triangles où $i \leqslant j$ et $i \geqslant j$, on compte alors deux fois les termes où $i = j$, que l'on retranche, on trouve donc:

$$S_n = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j + \sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} i - \sum_{i=1}^{n} i.$$

On constate alors que les deux premières sommes sont égales car i et j jouent des rôles symétriques, donc

$$S_n = 2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j - \sum_{i=1}^{n} i = 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} j - \frac{n(n+1)}{2} = 2\sum_{j=1}^{n} j^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.$$

2) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \binom{i}{j}$. Dans cette somme on peut restreindre $j \leqslant i$ car dans le cas contraire le coefficient $\binom{i}{j}$ est nul. Alors

$$S_n = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{i}{j}\right) = \sum_{j=0}^{n} 2^j = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \text{ (somme des termes d'une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1).}$$

Donc $\boxed{S_n = 2^{n+1} - 1}$.

Systèmes

Correction - de l'exercice 20 On donne les ensembles-solutions.

1) (S_1): $\{(1,2,3)\}$
2) (S_2): $\emptyset$
3) (S_3): $\{(x,1,-x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$
4) (S_4): $\{(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)\}$
5) (S_5): $\{(x,y,1-3x-4y,1) \,/\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
6) (S_6): $\{(\frac{1}{3},\frac{4}{3},z,\frac{1}{3}-z) \,/\, z \in \mathbb{R}\}$

Correction - de l'exercice 21 On donne les ensembles-solutions en distinguant les cas pour m.

1) Si $m \neq 2$: $\emptyset$.
Si $m = 2$, $\{(4-11z,-1+7z,z) \,/\, z \in \mathbb{R}\}$
2) Si $m = 1$: $\{(1-y,y) \,/\, y \in \mathbb{R}\}$.
Si $m = -1$: $\emptyset$
Sinon: $\{(\frac{1}{1+m},\frac{1}{1+m})\}$.
3) Si $m = -1$: $\{(\frac{1}{2},y,\frac{3}{2}-y) \,/\, y \in \mathbb{R}\}$.
Si $m = 3$: $\emptyset$
Sinon: $\{(\frac{m-1}{m-3},\frac{1}{3-m},\frac{m-4}{m-3})\}$.
4) Si $m = 1$: $\emptyset$ Si $m = -3$: $\{(t-\frac{1}{2},t,t-\frac{1}{2},t) \,/\, t \in \mathbb{R}\}$
Sinon: $\{(\frac{1}{m-1},-\frac{1}{m-1},\frac{1}{m-1},-\frac{1}{m-1})\}$.