Trigonométrie

Exercice 1. (♡)

1) En utilisant les angles $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$, calculer $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$.
2) Calculer $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$ en utilisant les formules de duplication.
3) Calculer $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{\pi}{8}$ en utilisant les formules de duplication.

Exercice 2. (♡) Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1) $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ 2) $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$ 3) $2\sin^2 x-\cos x-1=0$ 4) $2\sin^2 x-\cos x-1\geqslant 0$

Exercice 3 Résoudre dans $[0,2\pi]$ les équations suivantes:

1) (♡) (E_1) $\sqrt{3}\cos(2x)-\sin(2x)=1$ (E_2) $\cos(3x)+\sin(3x)=1$
2) $(*)$ (E_3) $\sin x+\sin(3x)+\sin(5x)=0$ (E_4) $4\cos^2(2x)-2(\sqrt{2}+1)\cos(2x)+\sqrt{2}=0$.

Inégalités et égalités

Exercice 4. (♡) Soit $z\in\mathbb{C}^*$. Exprimer $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$, $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)$ en fonction de $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$.

Exercice 5. (♡)Identité du parallélogramme.

1) Montrer que : $\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2$, $|z+z'|^2+|z-z'|^2=2(|z|^2+|z'|^2)$.
2) Donner une interprétation géométrique de cette égalité.

Exercice 6. $(*)$

1) Soit $(a,b)\in(\mathbb{C}^*)^2$, montrer que $\left|\frac{a}{|a|^2}-\frac{b}{|b|^2}\right|=\frac{|a-b|}{|a||b|}$.
2) Soient a,b,c des complexes de module 1, prouver que: $|ab+ac+bc|=|a+b+c|$.

Exercice 7. $(*)$

1) Prouver : $\forall (a,b,c)\in\mathbb{C}^3$, $|a||b-c|\leqslant |b||c-a|+|c||a-b|$.
2) En déduire : $\forall (a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4$, $|a-b||d-c|\leqslant |a-c||b-d|+|a-d||b-c|$.

Exercice 8. $(*)$ Montrer que : $\forall (a,b,c)\in\mathbb{C}^3$, $|1+a|+|a+b|+|b+c|+|c|\geqslant 1$.

Exercice 9. $(**)$ Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$ et u une racine carrée de zz' (c'est-à-dire que $u^2=zz'$).
Montrer que : $|z|+|z'|=\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|+\left|\frac{z+z'}{2}-u\right|$.

Forme trigonométrique

Exercice 10 Donner le module et un argument de:

1) ($\heartsuit$) i, $4+4\,\mathrm{i}$, $\sqrt{3}+3\,\mathrm{i}$, $-7\,\mathrm{i}$, $(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})^4$, $\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

2) ($\heartsuit$) $(1+\mathrm{i})^n$ $(n\in\mathbb{N})$, $(1+j)^{2n}$ $(n\in\mathbb{N})$

3) ($*$) $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ où $\theta\in[-\pi,\pi]$, $\dfrac{1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}{1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}$ où $\theta\in[-\pi,\pi]$

4) ($*$) $\dfrac{1+\mathrm{i}\tan\theta}{1-\mathrm{i}\tan\theta}$ où $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\dfrac{(1+\mathrm{i}\tan\theta)^2}{1+\tan^2\theta}$ où $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

Exercice 11. ($*$) Soit $x\in\mathbb{R}$ et $u\in\mathbb{C}$ de module 1. Montrer que $|x-u|=|1-xu|$.

Exercice 12. ($**$) Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$. Montrer que:

$$|z+z'|=|z-z'|\Leftrightarrow \mathrm{Arg}(z)=\mathrm{Arg}(z')+\frac{\pi}{2}\ [\pi].$$

Utilisation des complexes pour la trigonométrie

Exercice 13. ($\heartsuit$) Soit $x\in\mathbb{R}$. Linéariser les expressions suivantes

$$A=\sin^5 x,\qquad B=\cos x\sin^3 x.$$

Exercice 14. ($\heartsuit$) Soit $x\in\mathbb{R}$. Développer les expressions suivantes

$$A=\cos(4x),\qquad B=\sin(5x) \text{ on exprimera } B \text{ uniquement en fonction de } \sin x.$$

Exercice 15. ($\heartsuit$) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $\theta\in\mathbb{R}$. Calculer les sommes:

1) $S=\sum_{k=0}^{n}\cos(k\dfrac{\pi}{6})$, $T=\sum_{k=0}^{n}\sin(k\dfrac{\pi}{6})$

2) $S=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos(k\dfrac{\pi}{3})$, $T=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sin(k\dfrac{\pi}{3})$

3) $S=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)$, $T=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)$

Exercice 16. ($*$) Soit $\theta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta)$.

Exercice 17. ($*$) Soit $\theta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2^k}\cos(k\dfrac{\pi}{3})$.

Exercice 18. ($**$) Après avoir déterminé les valeurs de θ pour lesquelles les sommes sont bien définies, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(k\theta)}{\cos^k(\theta)}=\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta\cos^n(\theta)}\qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(k\theta)}{\cos^k(\theta)}=\frac{\cos^{n+1}(\theta)-\cos((n+1)\theta)}{\sin\theta\cos^n(\theta)}.$$

Racines n-ièmes - Résolution d'équations

Exercice 19. ($\heartsuit$) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

1) $\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} = \dfrac{z+2}{z-3\,\mathrm{i}}$

2) $2z + 6\overline{z} = 3 + 2\,\mathrm{i}$

3) $z^3 = \bar{z}$

4) $z^2 = |z|^2$

5) $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0.$

Exercice 20. ($\heartsuit$) Déterminer les racines carrées de $-3 - 4\,\mathrm{i}$.

Exercice 21. ($*$) Calculer les racines quatrièmes complexes de $-7 + 24\,\mathrm{i}$.

Exercice 22. ($\heartsuit$) Déterminer:

1) les racines quatrièmes de $\dfrac{\mathrm{i}+\sqrt{3}}{\mathrm{i}-\sqrt{3}}$

2) les racines cinquièmes de $-\,\mathrm{i}$

3) les racines sixièmes de $\dfrac{-4}{1+\mathrm{i}}$

Exercice 23. ($*$) En calculant les racines carrées de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}$ de deux manières, déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 24. ($*$) En utilisant les solutions de l'équation $z^{11} = -1$, montrer que :

$$\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 25. ($*$) On note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{7}}$, on pose

$$S = \omega + \omega^2 + \omega^4, \qquad T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$

1) Calculer $S + T$, ST.

2) Déterminer le signe de $\mathrm{Im}(S)$.

3) En déduire les valeurs de S et T.

Exercice 26 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

1) ($\heartsuit$) $\quad z^2 + z + 1 - \mathrm{i} = 0$

2) ($\heartsuit$) $\quad \mathrm{i}\,z^2 + (3 - 4\,\mathrm{i})z - 5 + \mathrm{i} = 0$

3) ($*$) $\quad z^3 - 2\,\mathrm{i}\,z^2 + 3\,\mathrm{i}\,z + 3 - \mathrm{i} = 0$, sachant qu'il y a une solution imaginaire pure

4) ($*$) $\quad z^4 + 10z^2 + 169 = 0$

5) ($*$) $\quad z^6 + (2\,\mathrm{i} - 1)z^3 - 1 - \mathrm{i} = 0$

6) ($*$) $\quad \left(\dfrac{z+j}{z-j}\right)^2 + \dfrac{z+j}{z-j} + 1 = 0$, où j vérifie $1 + j + j^2 = 0$.

Exercice. ($**$)

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = 0$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.

Exercice 28. $(*)$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $27(z-\mathrm{i})^6-(z+\mathrm{i})^6=0$.

Exercice 29. $(**)$ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+\mathrm{i})^n=(z-\mathrm{i})^n$.

Exercice 30. $(**)$ Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Résoudre le système $\begin{cases} x & +y & +z & =a\\ x & +jy & +j^2z & =b\\ x & +j^2y & +jz & =c\end{cases}$

Nombres complexes et géométrie

Exercice 31. $(\heartsuit)$ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants:

1) $\frac{z+1-\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$ appartient à $\mathrm{i}\mathbb{R}$
2) $\frac{1-\mathrm{i}\,z}{1+\mathrm{i}\,z}$ appartient à $\mathbb{R}$
3) $|z|=|z-2|$

Exercice 32. $(*)$ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants:

1) les points d'affixe $1,z,z^3$ sont alignés
2) les points d'affixe $1,z,z^2$ forment un triangle rectangle

Exercice 33. $(*)$ Soient A,B,C trois points du plan deux à deux distincts d'affixes respectives a,b,c. Montrer que A, B et C sont alignés si et seulement si $a\overline{b}+b\overline{c}+c\overline{a}\in\mathbb{R}$.

Exercice 34. $(*)$ Soit A,B,C,D un carré dans le plan muni d'un repère orthonormé. On suppose que C et D sont à coordonnées entières. Montrer que A et B le sont aussi.

Exercice 35. $(**)$ Soient A,B,C trois points du plan affine euclidien, d'affixes respectives a,b,c.

1) Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $c-a=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}(b-a)$.
2) En déduire que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a+jb+j^2c=0$.
3) En déduire que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si

$$a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)=0.$$