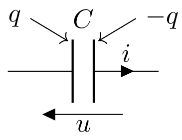
I Le condensateur

Un condensateur est constitué de 2 armatures séparées par un isolant. Les porteurs de charge peuvent s'accumuler sur l'une ou l'autre des armatures. Lorsqu'une armature acquiert la charge q, l'autre armature acquiert la charge $-q$, d'après la conservation de la charge.



1 Loi de comportement

Par définition, l'intensité entrant par l'armature portant la charge q s'écrit $\boxed{i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}$.

La tension au bornes du condensateur, orientée de l'armature portant la charge $-q$ vers l'armature portant la charge q, s'écrit $\boxed{u = \dfrac{q}{C}}$, où C est la **capacité** du condensateur, qui s'exprime en **Farad** ($\mathrm{F} = \mathrm{C.V^{-1}}$).

La loi de comportement du condensateur est donc $\boxed{i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$ **en convention récepteur**.

L'ordre de grandeur de la capacité d'un condensateur est de 1 nF à 1 μF.

2 Équivalent en régime stationnaire

En régime stationnaire, c'est-à-dire lorsque toutes les grandeurs sont constantes dans le temps, $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$, donc un condensateur se comporte comme interrupteur ouvert (coupe-circuit).

3 Énergie électrique emmagasinée dans un condensateur

La puissance recue par le condensateur s'écrit $P = ui = uC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}Cu^2)$.
Le travail électrique recu par un condensateur entre t_1 et t_2 s'écrit

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu^2\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}Cu(t_2)^2 - \frac{1}{2}Cu(t_1)^2$$

W ne dépend que de l'état du condensateur aux instants t_1 et t_2.

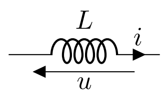
C'est pourquoi on définit $\boxed{E_e = \dfrac{1}{2}Cu^2}$ l'énergie électrique emmagasinée par le condensateur.[1]

Le travail recu par le condensateur s'écrit alors $\boxed{W = E_e(t_2) - E_e(t_1) = \Delta E_e}$.

Comme l'énergie est une fonction continue du temps, la tension $\boxed{u(t) \text{ au bornes d'un condensateur est continue}}$.

II La bobine

Une bobine est constituée d'un fil enroulé en hélice sur un grand nombre de tours.



1 Loi de comportement

La loi de comportement d'une bobine est $\boxed{u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$ **en convention récepteur**,

où L est l'**inductance** de la bobine qui s'exprime en **Henry** ($\mathrm{H} = \mathrm{V.A^{-1}.s}$).

L'ordre de grandeur de l'inductance d'une bobine est de 1 mH à 1 H.

1. Cette énergie est liée à l'existence d'un champ électrique dans le condensateur. De manière générale, l'énergie est définie à une constante près. Ici, on choisit cette constante de sorte que $E_e = 0$ pour $u = 0$.

2 Équivalent en régime stationnaire

En régime stationnaire, $u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$, donc une bobine se comporte comme fil (court-circuit).

3 Énergie magnétique emmagasinée dans une bobine

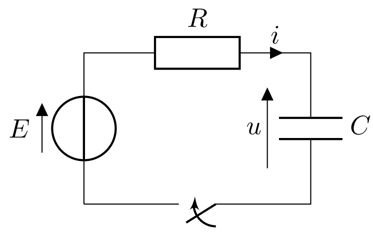
La puissance recue par la bobine s'écrit $P = ui = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}Li^2)$.
Ainsi, on définit $\boxed{E_m = \dfrac{1}{2}Li^2}$ l'énergie magnétique emmagasinée par la bobine. [2]
Le travail électrique recu par une bobine entre t_1 et t_2 s'écrit

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}Li(t_2)^2 - \frac{1}{2}Li(t_1)^2 = \Delta E_m$$

Comme l'énergie est une fonction continue du temps, l'intensité $\boxed{i(t) \text{ dans une bobine est continue}}$.

III Étude d'un circuit RC

On considère le circuit suivant. Le condensateur est initialement déchargé. A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur. On cherche les lois $u(t)$ et $i(t)$.



On note : $f(0^-) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}} f(t)$, $f(0^+) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)$ et $f(+\infty) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$

1 Conditions initiales

a Méthode générale

Lorsqu'une source est discontinue ou qu'on commute un interrupteur à $t = 0$, les grandeurs électriques peuvent être discontinues à cet instant.

Pour déterminer les grandeurs à $t = 0^-$, on suppose qu'à $t < 0$ le circuit a atteint un régime stationnaire. Par conséquent, les intensités à travers les condensateurs et les tensions aux bornes des bobines sont nulles. On peut éventuellement faire un schéma du circuit, en remplacant les condensateurs par des interrupteurs ouverts et les bobines par des fils. On en déduit les autres grandeurs à $t = 0^-$, en utilisant la loi des mailles et la loi des nœuds, en particulier les tensions aux bornes des condensateurs et les intensités à travers les bobines.

Pour déterminer les grandeurs à $t = 0^+$, on utilise la continuité des tensions aux bornes des condensateurs et des intensités à travers les bobines. On en déduit les autres grandeurs en utilisant la loi des mailles et la loi des nœuds.

b Cas du circuit RC

A l'état initial ($t = 0^-$), l'interrupteur est ouvert, d'où $i(0^-) = 0$, et le condensateur est déchargé, d'où $u(0^-) = 0$.
La tension aux bornes du condensateur est continue, donc $u(0^+) = u(0^-) = 0$.
On peut déterminer $i(0^+)$, en utilisant la loi des mailles $E = Ri(0^+) + u(0^+)$, d'où $i(0^+) = \frac{E}{R}$.

2. Cette énergie est liée à l'existence d'un champ magnétique dans la bobine. Là encore, cette énergie est définie à une constante près. On choisit cette constante de sorte que $E_m = 0$ pour $i = 0$.

2 État final

a Méthode générale

Pour déterminer les grandeurs quand $t \to +\infty$, on utilise que le circuit atteint un régime stationnaire. Par conséquent, les intensités à travers les condensateurs et les tensions aux bornes des bobines sont nulles. On peut éventuellement faire un schéma du circuit, en remplacant les condensateurs par des interrupteurs ouverts et les bobines par des fils. On en déduit les autres grandeurs quand $t \to +\infty$, en utilisant la loi des mailles et la loi des nœuds.

b Cas du circuit RC

Quand $t \to +\infty$, on atteint un régime stationnaire, donc $i(+\infty) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(+\infty) = 0$.
D'après la loi des mailles $E = Ri + u$, donc $u(+\infty) = E$.

3 Équation différentielle

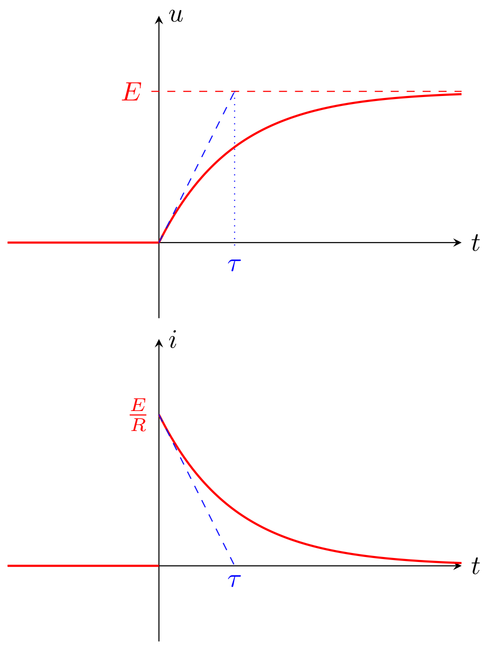
D'après la loi des mailles, $E = Ri + u$.
Or $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, donc $E = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u$, soit $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u = \frac{E}{RC}$.
On pose $\tau = RC$ la constante de temps du circuit.

4 Résolution de l'équation différentielle linéaire, à coefficients constants, avec second membre

On résout l'équation homogène : $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = 0$. Les solutions sont les fonctions de la forme : $u_h(t) = Ae^{-t/\tau}$.
On cherche une solution particulière de la même forme que le second membre, c'est-à-dire ici $u_p = \text{cste}$. On obtient $u_p = E$ (c'est la solution en régime stationnaire).
Donc les solutions sont les fonctions de la forme : $u(t) = Ae^{-t/\tau} + E$.
D'après la condition initiale : $u(0^+) = A + E = 0$, d'où $A = -E$.
Ainsi, $u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$.

D'après la loi des mailles, $E = Ri + u$, d'où $i = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$.

5 Graphes



Pour tout graphe d'un système du 1er ordre, la tangente à l'origine coupe l'asymptote en $t = \tau$.

6 Temps de réponse à $x\%$

Le temps de réponse à $x\%$ est l'instant $t_{x\%}$ tel que : $\boxed{u(t_{x\%}) - u(+\infty) = \frac{x}{100}[u(0) - u(+\infty)]}$.

Un **ordre de grandeur de la durée du régime transitoire** est donné par le temps de réponse à 5%, tel que $u(t_{5\%}) - E = \frac{5}{100}(0 - E)$, d'où $e^{-t_{5\%}/\tau} = 0,05$, soit $t_{5\%} = \tau \ln(20) \approx 3\tau$

7 Bilan de puissance

On multiplie la loi des mailles par i : $Ei = Ri^2 + ui$.
Ei est la puissance fournie par la source (convention générateur), Ri^2 est la puissance recue par la résistance (convention récepteur), dissipée par effet Joule, et ui est la puissance recue par le condensateur (convention récepteur).

8 Bilan énergétique entre $t = 0$ et $t \to +\infty$

On intègre le bilan de puissance entre $t = 0$ et $t \to +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} Ei\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} Ri^2\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu^2\right)\mathrm{d}t$$

Le travail fourni par la source est :

$$\int_0^{+\infty} Ei\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} EC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = EC\left[u(t)\right]_0^{+\infty} = CE^2$$

Le travail recu par le condensateur, emmagasiné sous forme d'énergie électrique, est :

$$\int_0^{+\infty} ui\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu^2\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}Cu(t)^2\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}CE^2$$

On en déduit le travail recu par la résistance, dissipé par effet Joule : [3]

$$\int_0^{+\infty} Ri^2\mathrm{d}t = CE^2 - \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}CE^2$$

On peut définir le rendement r de la charge comme le rapport de l'énergie utile sur l'énergie couteuse, c'est-à-dire ici le rapport de l'énergie recue par le condensateur sur le travail fourni par la source. Ainsi, $r = \frac{1}{2}$.

3. On peut également calculer le travail dissipé par effet Joule en utilisant la loi $i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$, où $\tau = RC$:

$$\int_0^{+\infty} Ri^2\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\int_0^{+\infty} e^{-2t/\tau}\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^{+\infty} = \frac{E^2}{R}\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}CE^2$$