Exercice 1. Questions indépendantes

1) On pose $f(x)=\sqrt{x^2+x^\alpha}-\sqrt{x^2+1}$. Soit $x>0$,

$$f(x)=\frac{(x^2+x^\alpha)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+x^\alpha}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^\alpha-1}{\sqrt{x^2+x^\alpha}+\sqrt{x^2+1}}\quad(*).$$

- **Si** $\alpha<0$, $x^\alpha-1\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-1$. Puis par opération sur les limites $\sqrt{x^2+x^\alpha}+\sqrt{x^2+1}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.
  Par quotient $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
- **Si** $\alpha=0$, $x^\alpha=1$ doc $f(x)=0$.
- **Si** $0<\alpha<2$, on factorise par $x=\sqrt{x^2}$ au dénominateur de $(*)$:

$$f(x)=\frac{x^\alpha}{x}\frac{1-\frac{1}{x^\alpha}}{\sqrt{1+x^{\alpha-2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

  Comme $x^{\alpha-2}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc par opérations $\sqrt{1+x^{\alpha-2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}2$. De plus $1-\dfrac{1}{x^\alpha}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$.
  Enfin, comme $x^{\alpha-1}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}0&\text{si }\alpha<1\\1&\text{si }\alpha=1\\+\infty&\text{si }\alpha>1\end{cases}$ et donc $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}0&\text{si }\alpha<1\\\frac12&\text{si }\alpha=1\\+\infty&\text{si }\alpha>1\end{cases}$.
- **Si** $\alpha>2$, on factorise le dénominateur de $(*)$ par $\sqrt{x^\alpha}=x^{\frac{\alpha}{2}}$

$$f(x)=\frac{x^\alpha}{x^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1-\frac{1}{x^\alpha}}{\sqrt{x^{2-\alpha}+1}+\sqrt{x^{2-\alpha}+x^{-\alpha}}}=x^{\frac{\alpha}{2}}\frac{1-\frac{1}{x^\alpha}}{\sqrt{x^{2-\alpha}+1}+\sqrt{x^{2-\alpha}+x^{-\alpha}}}.$$

  Comme $2-\alpha<0$ alors $x^{2-\alpha}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc par opérations $\sqrt{x^{2-\alpha}+1}+\sqrt{x^{2-\alpha}+x^{-\alpha}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$.
  Puis $x^{\frac{\alpha}{2}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. Donc finalement par opérations $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$
- **Si** $\alpha=2$, on utilise la même transformation que le cas $\alpha>2$,

$$f(x)=x\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^0+1}+\sqrt{x^0+x^{-2}}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

Bilan : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=\begin{cases}0&\text{si }\alpha<1\\\frac12&\text{si }\alpha=1\\+\infty&\text{si }\alpha>1\end{cases}}$

2) Soit $x>0$, posons $f(x)=\dfrac{a^{b^x}}{b^{a^x}}$,

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{b^x\ln a}}{\mathrm{e}^{a^x\ln b}}=\mathrm{e}^{b^x\ln a-a^x\ln b}.$$

Or

$$b^x\ln a-a^x\ln b=b^x\left(\ln a-\left(\frac{a}{b}\right)^x\ln b\right).$$

Or $1<a<b$ donc $0<\frac{a}{b}<1$, donc $\ln\frac{a}{b}<0$ car $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\mathrm{e}^{x\ln\frac{a}{b}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Donc par opérations

$$\ln a-\left(\frac{a}{b}\right)^x\ln b\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ln a.$$

Enfin $b^x=\mathrm{e}^{x\ln b}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ car $\ln b>0$.

Finalement, par opérations $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$.

Exercice 2

1) Soit $\theta\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(E)&\Leftrightarrow 3\theta=2\theta\ [2\pi]\text{ ou }3\theta=-2\theta\ [2\pi]\\&\Leftrightarrow\theta=0\ [2\pi]\text{ ou }\theta=0\ \left[\frac{2\pi}{5}\right]\end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble-solution de }(E)\text{ est }\left\{\dfrac{2k\pi}{5}\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

(Notons que cet ensemble contient nécessaire l'autre groupe de solutions $2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$).

2) Soit θ réel.

   -a- Formule connue : $\boxed{\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1}$.

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta+\theta) = \cos(2\theta)\cos\theta - \sin(2\theta)\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta \\ &\boxed{\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta}.\end{aligned}$$

-b- Méthode à l'aide des complexes:

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{2\,i\,\theta}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\left(e^{i\,\theta}\right)^2\right) \quad \text{(Formule de Moivre)} \\ &= \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^2\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2\,i\sin\theta\cos\theta\right) \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) \\ &\boxed{\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{3\,i\,\theta}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\left(e^{i\,\theta}\right)^3\right) \quad \text{(Formule de Moivre)} \\ &= \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^3\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\cos^3\theta + 3\cos^2\theta\, i\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta\right) \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) \\ &\boxed{\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta}\end{aligned}$$

3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 2\cos^2\theta - 1 \\ &\Leftrightarrow 4X^3 - 2X^2 - 3X + 1 = 0 \quad \text{où } X = \cos\theta \\ &\boxed{(E) \Leftrightarrow P(X) = 0 \quad \text{où } P = 4X^3 - 2X^2 - 3X + 1 \text{ et } X = \cos\theta}\end{aligned}$$

4) Puis, on remarque que $P(1) = 0$ donc P est factorisable par $X-1$. On obtient $P(X) = (X-1)(4X^2+2X-1)$ (que l'on peut obtenir par identification par exemple)

$$\begin{aligned}P(X) = 0 &\Leftrightarrow (X-1)(4X^2+2X-1) \\ &\Leftrightarrow X = 1 \quad \text{ou} \quad 4X^2+2X-1 = 0 \\ &\Leftrightarrow X = 1 \quad \text{ou} \quad X = \frac{-2+2\sqrt{5}}{8} \quad \text{ou} \quad X = \frac{-2-2\sqrt{5}}{8}\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\text{l'ensemble-solution de } P(X) = 0,\ \left\{1, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right\}}$.

5) D'après 3) et 4), il vient:

$$(E) \Leftrightarrow \cos\theta \in \left\{1, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right\}.$$

D'après 1), on déduit donc que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \in \left\{1, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right\}$.

En particulier pour $k = 1$, $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$ (car $\frac{2\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on exclut donc 1 et la valeur négative).

Pour $k = 2$, $\boxed{\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}}$ (car $\frac{4\pi}{5} \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, on exclut donc 1 et la valeur positive).

Pour le calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}-\pi\right) = -\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \qquad \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}.$$

NB: on peut aussi utiliser une formule de duplication:

$$\cos^2\frac{\pi}{5} = \frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}.$$

Puis comme $\frac{\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos\frac{\pi}{5} > 0$ d'où: $\boxed{\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}}$.

On peut encore simplifier:

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Exercice 3 Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$,

$$(E_1) \Leftrightarrow \frac{1-\mathrm{i}\,z}{1+\mathrm{i}\,z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} \Leftrightarrow (1-\mathrm{i}\,z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}(1+\mathrm{i}\,z) \Leftrightarrow z\,\mathrm{i}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}) = 1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}.$$

On distingue dans la suite les cas $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} = 0$ et $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} \neq 0$.

- Si $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} = 0$, i.e. $\alpha = \pi\ [2\pi]$, alors: $(E_1) \Leftrightarrow 0 = 2$. Donc (E_1) n'a pas de solution
- Si $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} = 0$ i.e. $\alpha \neq \pi\ [2\pi]$, alors

$$(E_1) \Leftrightarrow z = \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}}{\mathrm{i}\,(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha})} \Leftrightarrow z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{2}}\right)}{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{2}}\right)} \Leftrightarrow z = \frac{-2\,\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{i}\,2\cos\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow z = -\tan\frac{\alpha}{2}.$$

Conclusion: $\boxed{\text{l'ensemble solution de } (E_1) \text{ est : } \begin{cases} \emptyset & \text{si } \alpha = \pi\ [2\pi] \\ \{-\tan\frac{\alpha}{2}\} & \text{si } \alpha \neq \pi\ [2\pi] \end{cases}}$.

2) Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$,

$$(E_2) \Leftrightarrow \left(\frac{1-\mathrm{i}\,z}{1+\mathrm{i}\,z}\right)^{2n+1} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n]\!] \quad / \quad \frac{1-\mathrm{i}\,z}{1+\mathrm{i}\,z} = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{2n+1}}$$

On est donc ramené à l'équation (E_1) avec $\alpha = \frac{2k\pi}{2n+1}$. Notons que alors $\alpha \neq \pi\ [\pi]$ et donc d'après 1),

$\boxed{\text{l'ensemble solution est donc } \left\{-\tan\frac{k\pi}{2n+1} \ / \ k \in [\![0, 2n]\!]\right\}}$.

3) Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = (1+\mathrm{i}\,z)^{2n+1} - (1-\mathrm{i}\,z)^{2n+1}$.

-a- $P(z)$ est polynomiale de degré $2n+1$, le coefficient de degré $2n+1$ (appelé coefficient dominant) est le coefficient devant z^{2n+1} c'est-à-dire :

$$\lambda = \mathrm{i}^{2n+1} - (-\,\mathrm{i})^{2n+1} = \mathrm{i}^{2n+1}(1-(-1)^{2n+1}) = (\mathrm{i}^2)^n \times \mathrm{i} \times 2 = 2\,\mathrm{i}(-1)^n.$$

Puis $P(z)$ se factorise à l'aide de ses racines, qui sont les solutions (E_2), c'est-à-dire les : $z_k = -\tan\frac{k\pi}{2n+1}$ où $k \in [\![0, 2n]\!]$.

On a donc comme demandé :

$$\boxed{P(z) = 2\,\mathrm{i}(-1)^n \prod_{k=0}^{2n}\left(z + \tan\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \quad (*).$$

-b- Par ailleurs on peut réécrire $P(z)$ en développant à l'aide de la formule du binôme,

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(\mathrm{i}\,z)^k - \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-\,\mathrm{i}\,z)^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathrm{i}^k\, z^k(1-(-1)^k). \end{aligned}$$

On constate que le terme pour $k=0$ est nul, on peut donc commencer la somme à 1 et factoriser par z,

$$P(z) = z\sum_{k=1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathrm{i}^k\, z^{k-1}(1-(-1)^k) \quad (**).$$

. On rapproche donc les deux formules $(*)$ et $(**)$, en on divise par z pour tout $z \neq 0$,

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \mathrm{i}^k z^{k-1}(1-(-1)^k) = 2\,\mathrm{i}(-1)^n \prod_{k=0}^{2n} \left(z + \tan \frac{k\pi}{2n+1}\right). \quad (***)$$

Pour obtenir le produit voulu, il suffirait prendre $z = 0$, mais ce n'est pas possible car la relation est vraie pour $z \neq 0$, on aimerait donc faire tendre z vers 0 ce qui n'est pas possible avec nos connaissance actuelles (pas de limite de fonction de variable complexe).
Deux stratégies possibles :

- ou bien on identifie le terme constant (c'est-à-dire le coefficient devant z^0) dans cette égalité de polynômes (encore faut-il connaître le résultat stipulant l'unicité des coefficients même lorsque l'égalité n'est vérifiée que pour $z \in \mathbb{C}^*$, on admet aujourd'hui ce résultat qu'on démontrera plus tard), on obtient

$$2\,\mathrm{i}\binom{2n+1}{1} = 2\,\mathrm{i}(-1)^n \prod_{k=0}^{2n} \left(\tan \frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

  d'où

$$\boxed{\prod_{k=0}^{2n} \left(\tan \frac{k\pi}{2n+1}\right) = (-1)^n(2n+1)}.$$

- ou bien on se ramène au calcul de la limite en 0 mais en envisageant la relation vraie pour $z \in \mathbb{R}^*$ (vérifié car $\mathbb{R}^* \subset \mathbb{C}^*$), On peut donc par opérations sur les limites (somme et produit), faire $x \to 0$.
  On a pour $k \geqslant 2$, $x^{k-1} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, et $x^0 = 1$, donc après calcul de limite il ne reste plus que $\binom{2n+1}{1} 2\,\mathrm{i} = 2(2n+1)\,\mathrm{i}$ dans le membre de gauche.
  Et dans le membre de droite il ne reste plus que $2\,\mathrm{i}(-1)^n \prod_{k=0}^{2n} \left(\tan \frac{k\pi}{2n+1}\right)$. Finalement,
  $\boxed{\prod_{k=0}^{2n} \tan \frac{k\pi}{2n+1} = (-1)^n(2n+1)}$.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.

1)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j\, \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi(n-j)}{n}}\right) && \text{(formule du binôme de Newton)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{j} z^j\, \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi(n-j)}{n}} && \text{(sommation sur un rectangle, on échange les symboles de sommation)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi(n-j)}{n}}\right)^k\right). \quad (*)
\end{aligned}$$

Pour $j \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi(n-j)}{n}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi(n-j)}{n} = 0 \ [2\pi] \Leftrightarrow 2\pi n - 2\pi j = 0 \ [2\pi n] \Leftrightarrow 2\pi j = 0 \ [2\pi n] \Leftrightarrow j = 0 \quad \text{ou} \quad j = n.$$

Ainsi:

- pour $j \in [\![1, n-1]\!]$, en reconnaissant une série géométrique de raison $\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi(n-j)}{n}} \neq 1$, il vient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi(n-j)}{n}}\right)^k = \frac{1 - \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi(n-j)}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi(n-j)}{n}}} = 0 \qquad (\text{car } \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi(n-j)}{n}} = 1).$$

- pour $j = 0$ ou $j = n$, $\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi(n-j)}{n}} = 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi(n-j)}{n}}\right)^k = n.$$

En réinjectant dans $(*)$, il ne reste que les termes correspondant à $j = 0$ et $j = n$ dans la somme, on obtient:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}\right)^n = \binom{n}{0} z^0 \times n + \binom{n}{n} z^n \times n$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}\right)^n = n(1 + z^n)}.$$

2) Avec $z = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{n}}$, alors d'une part $1 + z^n = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = 0$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} z + \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}} &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\,\mathrm{i}\,\pi}{2n}} \left(\mathrm{e}^{\frac{(2k-1)\,\mathrm{i}\,\pi}{2n}} + \mathrm{e}^{-\frac{(2k-1)\,\mathrm{i}\,\pi}{2n}} \right) \\ &= 2\,\mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\,\mathrm{i}\,\pi}{2n}} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right). \end{aligned}$$

D'où:

$$\left(z + \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}} \right)^n = 2^n\,\mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\,\mathrm{i}\,\pi}{2}} \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) = 2^n \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\pi}}_{=(-1)^k} \underbrace{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{2}}}_{=\mathrm{i}} \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right)$$

Finalement, d'après 1),

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^n\,\mathrm{i}(-1)^k \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) = 0 \qquad \text{i.e.} \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) = 0}.$$