Exercice 1 Après avoir justifié leur existence, déterminer les primitives des fonctions suivantes

1) -a- sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto \dfrac{x^5}{5} - x^3 + 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$

-b- sur $I \subset \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \dfrac{-1}{x} + \dfrac{5}{2x^2} + C$

-c- sur $I \subset \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$

2) -a- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{6}(3+2x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

-b- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto -\frac{1}{3}(2+\cos(2x))^{\frac{3}{2}} + C$

-c- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{-1}{2(4+\mathrm{e}^x)^2} + C$

-a- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto -\operatorname{Arctan}(\cos x) + C$

-b- sur $I \subset \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \ln|\mathrm{e}^x - 1| + C$

-c- sur $]-\infty, 0[$, $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\mathrm{e}^x) + C$

3) -a- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{6}\ln(3x^2+1) + C$

-b- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$

-c- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2+5) + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$

-d- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{6}x}{2}\right) + C$

4) -a- sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $x \mapsto \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right| + C$

-b- sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $x \mapsto \dfrac{1}{4}\ln|x+2| + \dfrac{7}{4}\ln|x-2| + C$

5) -a- sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $x \mapsto \dfrac{-1}{2(2x-1)} + C$

-b- sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln|2x-1| - \frac{2}{2x-1} + C$

6) -a- sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$, $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-3}{x-1}\right| + C$

-b- sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$, $x \mapsto \dfrac{9}{2}\ln|x-3| - \dfrac{1}{2}\ln|x-1| + x + C$

-c- sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$, $x \mapsto 10\ln|x-3| - \ln|x-1| + 2x + C$

7) -a- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{4}\operatorname{Arctan}\left(x + \dfrac{1}{2}\right) + C$

-b- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{16}\operatorname{Arctan}\left(x + \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{8}\ln(4x^2+4x+5) + C$

8) -a- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{2}x\,\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + C$

-b- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\,\mathrm{e}^{-x} - 3\,\mathrm{e}^{-x} + C$

9) -a- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto -\dfrac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

-b- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

10) -a- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}(-\cos x + 2\sin x) + C$

-b- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-x}(-\cos(2x) + 2\sin(2x)) + C$

11) -a- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$

-b- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x - \dfrac{2}{3}\sin^3 x + \dfrac{1}{5}\sin^5 x + C$

-c- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{32}\sin(4x) - \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{3x}{8} + C$

Exercice 3

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2+2} = x - 1 + \dfrac{2}{x^2+2}.$

3) Primitives: $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - x + \sqrt{2}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

1) sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan} x(x^2+1) - \dfrac{x}{2} + C$

2) sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3\operatorname{Arctan} x + \dfrac{1}{6}\ln(1+x^2) - \dfrac{x^2}{6} + C$

3) sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \dfrac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$

4) sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-n}\dfrac{\ln x}{x^{n-1}} - \dfrac{1}{(1-n)^2}\dfrac{1}{x^{n-1}} + C$

Exercice 5

1) Changement de variable $t = \cos u$, puis après calcul les primitives sont : $x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sqrt{1-x^2} - x) + C$.

2) Une IPP, les primitives sont : $x \mapsto x\sin^3 x + \sin x - \dfrac{1}{3}\sin x + \dfrac{1}{9}\sin^3 x + C$.

3) Plus dur. Chgt de variable : $u = \operatorname{sh} t$. Pour le changement de borne on aura besoin de résoudre :

$$x = \operatorname{sh} u \Leftrightarrow [....calcul faire...] \Leftrightarrow u = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Les primitives sont : $x \mapsto \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$.

4) On passe par les complexes, $x^2\,\mathrm{e}^x \sin(2x) = \operatorname{Im}(x^2\,\mathrm{e}^{(1+2\,\mathrm{i})x})$ puis deux IPP,
les primitives sont $x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)\,\mathrm{e}^x((-x+1)\cos x + (x+1)\sin x) + C$.

Exercice 6

1) $\frac{\pi}{4}$ 2) $\frac{\ln 3}{2}$ 3) $\ln(1+\sqrt{2})$ 4) $\ln 3$

Exercice 7

1) Changement de variable $u = \cos t$, les primitives sont $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\cos x - \alpha}{\cos x - \beta}\right|$ où $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

2) Changement de variable $u = \sin$, les primitives sont $x \mapsto \ln|\cos x| - \frac{1}{2}\ln|1-2\sin^2 x|$

3) $\frac{\sin x}{\sin x - \cos x} = 1 + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ (forme $\frac{u'}{u}$) pour le deuxième terme. Les primitives sont $x \mapsto x + \ln|\sin x - \cos x| + C$.

4) Trop difficile pour figurer dans cette fiche, on verra lorsque l'on aura la décomposition en éléments simples.

Exercice 8

1) On pose $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$. f est continue sur $]-1,+\infty[$ donc y admet des primitives.
Soit $x \in]-1,+\infty[$, on pose $u = \sqrt{1+t}$ dans $\displaystyle\int^x \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$, alors

$$u^2 = 1+t \quad \text{donc} \quad t = u^2 - 1 \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u.$$

$$\int^x \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = \int^{\sqrt{1+x}} \frac{u^2-1}{u} \times 2u\,\mathrm{d}u = 2\int^{\sqrt{1+x}} (u^2-1)\,\mathrm{d}u$$
$$\boxed{\int^x \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3 - 2\sqrt{1+x} + C}.$$

2) On pose $f(x) = \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}$. f est continue sur $[0,1[$ donc y admet des primitives.
Soit $x \in [0,1[$, on pose $u = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ dans $\displaystyle\int^x \sqrt{\frac{t}{(1-t)^3}}\,\mathrm{d}t$, alors

$$t = \frac{u^2}{1+u^2} \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}t = \frac{2u}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u.$$

Après quelques simplifications [...]

$$\int^x \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = \int^{\sqrt{\frac{x}{1-x}}} \frac{2u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$
$$\boxed{\int^x \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = 2\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}} - \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)\right) + C}.$$

3) On pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$. f est continue sur $[1,+\infty[$ donc y admet des primitives.

Soit $x \in [1, +\infty[$, on pose $u = \sqrt{t-1}$ dans $\displaystyle\int^x \frac{1}{\sqrt{t-1}+1}\,\mathrm{d}t$, alors

$$u^2 = t-1 \quad \text{donc} \quad t = u^2+1 \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u.$$

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{1}{\sqrt{t-1}+1}\,\mathrm{d}t &= 2\int^{\sqrt{x-1}} \frac{u}{u^2+u+1}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int^{\sqrt{1+x}} \left(\frac{1}{2}\frac{(2u+1)}{u^2+u+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right)\mathrm{d}u \\
&= 2\int^{\sqrt{1+x}} \left(\frac{1}{2}\frac{(2u+1)}{u^2+u+1} - \frac{2}{3}\frac{1}{(\frac{2u+1}{\sqrt{3}})^2+1}\right)\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int^x \frac{1}{\sqrt{t-1}+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x-1}| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}}\right) + C}.$$