Équations différentielles du premier ordre

Exercice 1. ($\heartsuit$) Résoudre les équations différentielles suivantes ou problème de Cauchy d'inconnue $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable,

1) $y' + 3y = 1$, $I = \mathbb{R}$
2) $y' + y = \cos x + \mathrm{e}^{-2x}$, $y(0) = 1$, $I = \mathbb{R}$
3) $y' + 2xy = \mathrm{e}^{x-x^2}$, $I = \mathbb{R}$
4) $2xy' - y = 2x^2 \ln x$, $I = \mathbb{R}_+^*$
5) $xy' + y = \operatorname{Arctan} x$, $I = \mathbb{R}_+^*$
6) $y' + y\tan(x) = \sin(2x)$, $y(0) = 2$, avec $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Exercice 2. ($*$) On considère l'équation différentielle: (E) $x^2y' - xy = 1$.

1) Montrer sans calculs qu'on ne peut trouver de solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
2) Résoudre cette équation sur $]0, +\infty[$ et retrouver le résultat précédent.

Exercice 3. ($*$) On pose l'équation différentielle: (E) $|x|y' + y = x^2$ où $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

1) Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
2) En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Équations différentielles du second ordre

Exercice 4. ($\heartsuit$) Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

1) $y'' - 3y' + 2y = 2 + 3\,\mathrm{e}^x$
2) $y'' + 4y' = \sin(2x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
3) $y'' - 4y' + 4y = \cos^2 x$
4) $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{ch}(x)$

Exercice 5. ($\heartsuit$) Résoudre $y'' - (2 - \mathrm{i})y - 2\,\mathrm{i}\,y = 0$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Exercice 6. ($*$) Résoudre $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \sin(x)\,\mathrm{e}^x \\ y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0 \end{cases}$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 7. ($*$) Résoudre $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 2x + 3$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
On cherchera une solution particulière polynomiale *(quel est son dégré?)*.

Exercice 8. ($*$) Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

1) $y'' + y = |x| + 1$
2) $y'' - 4y = \mathrm{e}^{|x|}$

Exercice 9. ($*$) Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E)\ \ y'' + 4y = \cos(mx) \quad \text{où} \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Autres équations

Exercice 10. $(*)$ On veut résoudre l'équation $(E)\ :\ x^2y'' + 3xy' + y = 0$ pour $x \in]0, +\infty[$.
L'objectif est de mettre en oeuvre le changement de variable $x = \mathrm{e}^t$.

1) Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. On pose pour $t \in \mathbb{R}$ $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$.
   Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle (F) que l'on déterminera.
2) Résoudre cette équation différentielle (F).
3) Conclure.

Exercice 11. $(*)$ Résoudre l'équation $(E)\ :\ y'' + \dfrac{2x}{1+x^2}y' + \dfrac{1}{(1+x^2)^2}y = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.
en mettant en oeuvre le changement de variable $t = \operatorname{Arctan} x$.
Suivre le plan de l'exercice précédent

Exercice 12. $(*)$ Résoudre l'équation $y''' + y'' + y' + y = 0$ où $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *On pourra poser* $z = y'' + y$.

Exercice 13. $(*)$ On veut résoudre l'équation $(E)\ :\ x(1+x)y'' - xy' + y = 0$ pour $x \in]0, +\infty[$.

1) Vérifier que $x \mapsto x$ est solution de (E).
2) Soit a une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. On pose $y : x \mapsto a(x)x$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si a est solution d'une équation différentielle (F).
3) Résoudre l'équation (F).
4) Achever alors la résolution de (E) sur $]0, +\infty[$.
5) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14. $(*)$ Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = -2x + \mathrm{e}^t \end{cases}$

Analyse-Synthèse

Exercice 15. $(**)$ Trouver toutes les applications $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in [0,1], \quad f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)\,dt = 0.$$

Exercice 16. $(**)$ Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 17. $(***)$ Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$