Chapitre
Nombres réels

I Borne supérieure / Borne inférieure

Définition (Majorant, minorant...)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- (i) $m \in \mathbb{R}$ est **minorant** de A si: $\forall x \in A,\ m \leqslant x$
  (ii) $M \in \mathbb{R}$ est **majorant** de A si: $\forall x \in A,\ x \leqslant M$
- (i) A est **minorée** s'il existe un minorant: $\exists m \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in A,\ m \leqslant x$
  (ii) A est **majorée** s'il existe un majorant: $\exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in A,\ x \leqslant M$
  (iii) A est **bornée** si A est majorée et minorée qui peut s'écrire: $\exists K \in \mathbb{R}^+ \,/\, \forall x \in A,\ |x| \leqslant K$
- (i) $m \in \mathbb{R}$ est **plus petit élément** de A si: $m \in A$ **et** m minorant de A.
  On note $m = \min A$ ou $m = \min\limits_{x\in A} x$.
  (ii) $M \in \mathbb{R}$ est **plus grand élément** de A si: $M \in A$ **et** M majorant de A.
  On note $M = \max A$ ou $M = \max\limits_{x\in A} x$.
- (i) La **borne inférieure** de A est le plus grand des minorants de A noté $\inf A$ ou $\inf\limits_{x\in A} x$.

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ m \leqslant x & (m \text{ minorant}) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A \,/\, x < m + \varepsilon & (\text{tout réel plus grand que } m \text{ n'est plus minorant}) \end{cases}.$$

  (ii) La **borne supérieure** de A est le plus petit des majorants de A noté $\sup A$ ou $\sup\limits_{x\in A} x$.

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leqslant M & (M \text{ majorant}) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A \,/\, M - \varepsilon < x & (\text{tout réel plus petit que } M \text{ n'est plus majorant}) \end{cases}.$$

Remarques

- Le plus petit/grand élément de A appartient à A, en revanche la borne supérieure/inférieure de A n'appartient pas nécessairement à A.
- La borne supérieure/inférieure n'existe pas nécessairement.
- Si le maximum de A existe alors il est la borne supérieure de A. Que dire de la réciproque?

Exemples Déterminer, lorsqu'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure, la borne inférieure de ces parties de $\mathbb{R}$:

$$A = \{-12, 1, 0, 3\}, \qquad B = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \qquad C = [0, 2[\qquad D = [0, +\infty[.$$

Théorème (Plus grand/petit élément dans $\mathbb{Z}$)

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.
  Conséquence : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un petit élément (car $\mathbb{N}$ est minorée par 0).

Remarques

On utilise ce théorème pour démontrer l'existence de la partie entière, pour démontrer l'existence du reste et du quotient de la division euclidienne.

Théorème (Passage au sup, à l'inf)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- **Passage au** sup: si pour tout $x \in A$, $x < M$ (ou $x \leqslant M$) alors $\sup A \leqslant M$.
- **Passage à l'**inf: si pour tout $x \in A$, $m < x$ (ou $m \leqslant x$) alors $m \leqslant \inf A$.

Théorème (Théorème de la borne supérieure)

- Toute partie **non vide**, **majorée** de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie **non vide**, **minorée** de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.
- Toute partie **non vide**, **bornée** de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.

☞ **Explication** ☜ Ce théorème est un **théorème d'existence**. Autrement dit, il affirme l'existence d'une borne supérieure/inférieure de A sous certaines conditions vérifiées par A. Bien sûr, ce théorème ne fournit pas la borne supérieure/inférieure, il faut la calculer.
Ce théorème sera utilisé pour : démontrer le théorème de caractérisation des intervalles, construire l'intégrale de Riemann, démontrer le théorème de la limite monotone.

Exercice. On pose $A = \left\{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Montrer que A admet une borne supérieure et une bonne supérieure. Les déterminer.

Définition (Limite d'une suite)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et $l \in \mathbb{R}$.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite l ou que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et m, M deux réels.

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} m \text{ est un minorant de } A \\ \text{il existe une suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ d'éléments de } A \text{ telle que } x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m \end{cases}$$

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{il existe une suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ d'éléments de } A \text{ telle que } x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M \end{cases}$$

Exemples Déterminer la borne supérieure, la borne inférieure de ces parties de $\mathbb{R}$:

$$A = [0, 2[\qquad B = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \qquad C = \left\{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

II Intervalles

Définition (Intervalles de $\mathbb{R}$)

On rappelle les neuf types d'intervalles de $\mathbb{R}$, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$[a,b],\ [a,b[,\ ]a,b],\ ]a,b[,\ ]-\infty,a[,\ ]-\infty,a],\ ]a,+\infty[,\ [a,+\infty[,\ ]-\infty,+\infty[.$$

Théorème (Caractérisation des intervalles)

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous a et b dans I, on a $[a,b] \subset I$, c'est-à-dire:

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad \forall c \in \mathbb{R}, \qquad a \leqslant c \leqslant b \Rightarrow c \in I.$$

Définition (Adhérence, intérieur)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

- L'**adhérence** de I, notée $\overline{I}$, est le plus petit intervalle fermé de $\mathbb{R}$ contenant I
- L'**intérieur** de I, noté $\mathring{I}$, est le plus grand intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ inclus dans I

III Partie entière

Théorème-Définition (Partie entière)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ unique tel que $n \leqslant x < n+1$, n est appelé **partie entière** de x noté $\lfloor x \rfloor$.
Autrement dit, la partie entière de x est le plus grand entier n inférieur ou égal x.

Graphe

Exemple $\lfloor 1.5 \rfloor = 1$, $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$.

Théorème (Caractérisation de la partie entière)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique couple $(n,d) \in \mathbb{Z} \times [0,1[$ tel que: $\quad x = n + d$.
Dans ce cas, n est la partie entière de x, $n = \lfloor x \rfloor$ et d est appelée la **partie décimale** de x.

✎ Méthode pratique ✎ (Comment calculer une partie entière)

On souhaite calculer la partie entière d'une expression X. Deux méthodes.

- À l'aide de la définition, on cherche à encadrer X par deux entiers consécutifs : $n \leqslant X < n+1$. Par unicité d'un tel encadrement, n est alors la partie entière de X.
- À l'aide de la caractérisation, on cherche à écrire $X = n + d$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $d \in [0,1[$. L'unicité d'une telle décompostion garantit que n est la partie entière de X.

Théorème (Propriétés de la partie entière)

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1, \qquad x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$

3) $\forall x \in \mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor = x.$

4) $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1.$

Exercice. Soient x et y deux réels. Exprimer $\lfloor x+y \rfloor$ à l'aide de $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor y \rfloor$.

☞ **Explication** ☜ On peut définir les approximations de réels par défaut ou par excès à l'aide de la partie entière. Par, exemple, si $x = 7,123456$, l'approximation de x à 10^{-3} par défaut est $7,123$ soit $\frac{7123}{1000} = \frac{\lfloor 10^3 x \rfloor}{10^3}$, tandis que l'approximation de x à 10^{-3} par excès est $7,124$ soit $\frac{7123+1}{1000} = \frac{\lfloor 10^3 x \rfloor + 1}{10^3}$. Plus généralement, on a:

Théorème (Approximation des réels)

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leqslant x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}.$$

Le rationnel $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \in \mathbb{Q}$ est appelé **approximation décimale de x à 10^{-n} par défaut**. Le rationnel $\frac{\lfloor 10^n x + 1 \rfloor}{10^n} \in \mathbb{Q}$ est appelé **approximation décimale de x à 10^{-n} par excès**.

Remarques

Comme conséquence de ce qui précède, la suite $\left(\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right)_n$ converge vers x. Ainsi tout réel est limite d'une suite de rationnels.

IV Densité

Définition (Densité)

Une partie D de $\mathbb{R}$ est dite **dense** dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b \Rightarrow]a,b[\cap D \neq \varnothing.$$

C'est-à-dire, entre deux réels on peut trouver (au moins) un élément de D.

Remarques

Si D est dense dans $\mathbb{R}$, alors entre deux réels distincts il existe une infinité d'éléments de D.

Théorème (Caractérisation séquentielle de la densité)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

$$D \text{ dense ds } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \text{il existe une suite } (x_n) \text{ d'éléments de } D \text{ telle que } x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x.$$

Théorème (Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$)

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. **Conséquences :** entre deux réels il y a une infinité de rationnels/irrationnels.

Exercice.

1) Déterminer les applications croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant: $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$.

2) Déterminer les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant: $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$.