Les réponses aux questions doivent être soigneusement justifiées. La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale. Les **résultats** doivent être mis en évidence, **encadrés**. Vous pouvez sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que vous admettez les résultats non prouvés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Exercice 1

1) On pose $I = \displaystyle\int_{-1}^{2} \sqrt{-x^2+x+2}\,\mathrm{d}x$. Après avoir justifié l'existence de J, calculer J. [On mettra le trinôme sous forme canonique]

Exercice 2 On pose $f : x \mapsto \dfrac{\cos x - 1}{\tan x}$.

1) -a- Déterminer le domaine de définition de f et étudier la parité de f.
   -b- Étudier la limite de f en 0 et en $\frac{\pi}{2}$
   -c- Avec les limites obtenues à la question précédente, on prolonge f par continuité en 0 et en $\frac{\pi}{2}$. On continuera à noter f la fonction ainsi prolongée.
   Étudier la dérivabilité de f en 0 et en $\frac{\pi}{2}$.
   -d- Montrer que f est dérivable sur $D = \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ et que :

$$\forall x \in D, \quad f'(x) = \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 + \cos x - 1)}{\sin^2 x}.$$

   -e- Montrer qu'il existe une fonction $\widetilde{f}$ dérivable sur $]-\pi, \pi[$ telle que la restriction de $\widetilde{f}$ à D soit f.

2) Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable de $t = \cos x$.

3) On considère l'équation différentielle : $(E) \quad y'(x) + \dfrac{2}{\sin(2x)} y(x) = -\cos x \quad$ où $\quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

   -a- Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{\sin(2x)}$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   On pourra utiliser le changement de variable $s = \tan t$ pour le calcul de $\displaystyle\int^{x} \frac{2}{\sin(2t)}\,\mathrm{d}t$.
   -b- En déduire la résolution de l'équation homogène associée (E) sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   -c- Montrer que f est solution particulière de (E).
   -d- Par une autre méthode déterminer une solution particulière de (E).
   -e- En déduire la résolution de (E) sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   -f- **Bonus** Résoudre l'équation différentielle sur $]-\pi, \pi[$: $\sin(2x)y'(x) + 2y(x) = -\cos x \sin(2x)$.
   Indication Les calculs seront plus simples si vous utilisez f comme solution particulière de (E) plutôt que la solution obtenue au 3.d.

Exercice 3. Facultatif
On considère un intervalle I, des fonctions continues a et b de I dans $\mathbb{R}$, et l'équation différentielle :

$$(E) \;\; y' + ay = b.$$

Soit $x_0 \in I$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note f_λ l'unique solution de (E) valant λ en x_0, $\mathcal{C}_\lambda$ son graphe et T_λ la tangente à $\mathcal{C}_\lambda$ au point d'abscisse x_0.
Montrer que les droites T_λ (où λ décrit $\mathbb{R}$) sont soit toutes parallèles, soit possèdent un point commun.