La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale :

- chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie
- chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément un théorème du cours avec ses hypothèses exactes ou en citant le numéro d'une question précédente du problème
- toute question amène une réponse qui doit être encadrée
- les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrase en français
- les notations de l'énoncé doivent être respectées
- les copies doivent être numérotées
- on peut sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que l'on admet les résultats non prouvés
- on peut traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Exercice 1. Questions indépendantes

1) Limite éventuelle de $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{(\sin\sqrt{x})^2}$ en 0.

2) Calculer la limite en $+\infty$ et en 0 de $f(x)=\dfrac{\ln(1+2x^3)}{3x^2+4x}$.

3) Résoudre l'équation $\operatorname{sh} x=3$.

4) Résoudre l'inéquation $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\leqslant 1-x$.

Exercice 2 On rappelle que $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1 et pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $z\in\mathbb{C}$ on considère la somme

$$S_n(z)=1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}z^k \qquad \text{avec la convention} \qquad S_1(z)=1.$$

1) Étude du cas $n=3$. Dans ce cas $S_3(z)=1+z+z^2$.
   - -a- Déterminer sous forme algébrique les solutions z de l'équation $S_3(z)=\mathrm{i}$.
   - -b- Déterminer l'ensemble des $z\in\mathbb{C}$ tels que $S_3(z)\in\mathbb{R}$.
2) Calculer $S_n(z)$ en fonction de n et z.
3) Dans cette question, on pose $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}$ et $n\geqslant 2$.
   - -a- Montrer que $S_n(z)=\dfrac{2}{1-z}$.
   - -b- Déterminer le module et un argument de $S_n(z)$.
4) -a- Montrer par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ que pour tout $z\in\mathbb{U}$ on a $|S_n(z)|\leqslant n$.
   - -b- Cette borne est-elle atteinte pour un $z\in\mathbb{U}$? Justifier.
5) Soit $n\geqslant 2$. Le but de cette question est de déterminer $\Gamma=\{z\in\mathbb{U}\ /\ |S_n(z)|=1\}$.
   - -a- Montrer que si $z\in\mathbb{U}_{n-1}\setminus\{1\}$ ou si $z\in\mathbb{U}_{n+1}\setminus\{1\}$ alors $z\in\Gamma$.
   - -b- Soit $z\in\Gamma$. Justifier l'égalité $|z^n-1|=|z-1|$, puis en déduire que $z^n+\overline{z}^n=z+\overline{z}$.
   - -c- Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\cos(n\theta)=\cos\theta$.
   - -d- Déduire de ce qui précède l'ensemble Γ.

Exercice 3. Interversion de limites?

Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. On définit la suite complexe $(z_n)_{n\geqslant 0}$ par son premier terme $z_0 = 1$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = e^{i\theta} z_n + \frac{1}{2}(1 - e^{i\theta}).$$

1) On note M_{n+1} et M_n les points d'affixes respectives z_{n+1} et z_n. Reconnaître les éléments caractéristiques de l'application transformant M_n en M_{n+1}.

2) Montrer que la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$, définie par $w_n = z_n - \dfrac{1}{2}$ est une suite géométrique.

3) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 0$, une expression de w_n puis de z_n en fonction de n (et de θ).

4) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit la somme $S_n(\theta) = z_0 + z_1 + \cdots + z_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_k$.

   Montrer que

$$S_n(\theta) = \frac{n+1}{2} + \frac{e^{in\frac{\theta}{2}} \sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{2\sin(\frac{\theta}{2})}.$$

5) On pose, pour tout entier $n \geqslant 0$: $T_n(\theta) = \dfrac{S_n(\theta)}{n+1}$.

   Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|T_n(\theta) - \frac{1}{2}\right| = 0$.

   On dit que la suite complexe $(T_n(\theta))_{n\geqslant 0}$ converge vers le nombre $\dfrac{1}{2}$.

6) Un entier n étant fixé, déterminer la limite de $T_n(\theta)$, lorsque θ tend vers zéro.

7) Calculer alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{\theta\to 0} T_n(\theta)\right)$ et $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\left(\lim_{n\to+\infty} T_n(\theta)\right)$.

   Conclure.

Exercice 4. Fonctions trigonométriques.

Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x) + 2\operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

On se propose de donner une expression simple de f par deux méthodes différentes.

1) <u>Première méthode:</u> Étude de fonction.

   -a- Déterminer le domaine de définition de f et étudier la continuité de f sur son domaine de définition.

   -b- Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$.

   -c- Déterminer f'.

   -d- En déduire une expression simple de f.

2) <u>Deuxième méthode:</u> Avec des fonctions hyperboliques.

   -a- Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer un réel z simple dépendant de y tel que : $\dfrac{1 - \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} y} = \mathrm{e}^z$

   -b- Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{Arctan}\left(\mathrm{e}^{-y}\right)\right) = \operatorname{th} y.$$

   -c- En déduire, pour tout $y \in \mathbb{R}$, une relation simple entre $\operatorname{Arctan}\left(\mathrm{e}^{-y}\right)$ et $\operatorname{Arcsin}(\operatorname{th} y)$.

   -d- Montrer que tout réel $x \in]-1, 1[$ s'écrit sous la forme $x = \operatorname{th} y$, pour un certain réel y.

   -e- Retrouver à partir des résultats obtenus dans la question 2) le résultat obtenu dans la question 1)-d-.