Exercice 1

1) Soit $x \in]0,1]$,
$$f(x)=\frac{(1+x)-(1-x)}{\left(\sin\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}\right)^2\times\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$
$\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}=0$ et $\lim\limits_{u\to0}\frac{\sin u}{u}=1$ donc par composition $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$.
On en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to1}f(x)=1}$.

2) Pour x au voisinage de 0 différent de 0,
$$f(x)=\frac{\ln(1+2x^3)}{2x^3}\frac{2x^3}{3x^2+4x}=\frac{\ln(1+2x^3)}{2x^3}\frac{2x^2}{3x+4}.$$
Or $2x^3\underset{x\to0}{\longrightarrow}$ et $\frac{\ln(1+u)}{u}\underset{u\to0}{\longrightarrow}1$ donc par composition $\frac{\ln(1+2x^3)}{2x^3}\underset{x\to0}{\longrightarrow}1$. Puis par opérations $\frac{2x^2}{3x+4}\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$.
Finalement par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to0}f(x)=0}$.

Limite en $+\infty$. Soit $x>0$,
$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{\ln(x^3)+\ln(\frac{1}{x^3}+2)}{3x^2+4x}\\&=3\frac{\ln x}{x^2}\frac{1}{3+\frac{4}{x}}+\frac{\ln(\frac{1}{x^3}+2)}{3x^2+4x}.\end{aligned}$$
Par croissances comparées $\frac{\ln x}{x^2}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et par opérations $\frac{\ln(\frac{1}{x^3}+2)}{3x^2+4x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$.

3) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\operatorname{sh}x=3&\iff\frac{e^x-e^{-x}}{2}=3\\&\iff e^{2x}-6e^x-1=0\end{aligned}$$
On pose $z=e^x$.
$$\operatorname{sh}x=3\iff z^2-6z-1=0$$
Le discriminant de z^2-6z-1 est $\Delta=36+4=40$ donc $z^2-6z-1=\left(z-3-\sqrt{10}\right)\left(z-3+\sqrt{10}\right)$.
Donc
$$\operatorname{sh}x=3\iff e^x=3+\sqrt{10}\text{ ou }e^x=3-\sqrt{10}$$
$9<10$ donc $3<\sqrt{10}$, $3-\sqrt{10}<0$ et on a $3+\sqrt{10}>0$.
On a donc
$$\operatorname{sh}x=3\iff e^x=3+\sqrt{10}$$
$t\mapsto\ln t$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ donc
$$\boxed{\operatorname{sh}x=3\iff x=\ln\left(3+\sqrt{10}\right)}.$$
<u>Rq:</u> $x\mapsto\operatorname{sh}x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc on savait que l'équation avait une unique solution.

4) L'inéquation est définie si $1-x\neq0$ et $\frac{1+x}{1-x}\geqslant0$ c'est-à-dire pour $x\in[-1,1[$.
Soit $x\in[-1,1[$,
$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\leqslant1-x&\iff\frac{1+x}{1-x}\leqslant(1-x)^2\ \text{ car }1-x>0\text{ et }t\mapsto t^2\text{ est strictement croissante sur }\mathbb{R}^+\\&\iff\frac{1+x-(1-x)^3}{1-x}\leqslant0\\&\iff x(x^2-3x+4)\leqslant0\ \text{ car }1-x>0.\end{aligned}$$
Le trinôme x^2-3x+4 est toujours strictement positif (discriminant) donc
$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\leqslant1-x\iff x\leqslant0$$
On n'oublie pas $x\in[-1,1[$. L'ensemble-solution est $\boxed{\mathcal{S}=[-1,0]}$.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) -a- Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$S_3(z) = 1 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 - \mathrm{i} = 0 \ (E).$$

Le discriminant de (E) est $\Delta = 1 - 4(1-\mathrm{i}) = -3 + 4\,\mathrm{i}$. On a $|\Delta| = 5$. Soit $\delta = x + \mathrm{i}\,y$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\delta^2 = -3 + 4\,\mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \text{ (module)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ xy = 2 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ xy > 0 \\ y = 2 \text{ ou } y = -2 \end{cases}.$$

D'où $\Delta = (1 + 2\,\mathrm{i})^2$. D'où les solutions de (E): $\dfrac{-1-(1+2\,\mathrm{i})}{2} = -1 - \mathrm{i}$, $\dfrac{-1+(1+2\,\mathrm{i})}{2} = \mathrm{i}$.

D'où $\boxed{\text{l'ensemble-solution de l'équation } S_3(z) = 1: \ \{\mathrm{i}, -1-\mathrm{i}\}}$.

-b- Notons F l'ensemble cherché. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in F \Leftrightarrow S_3(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 + z + z^2 = \overline{1 + z + z^2} \Leftrightarrow 1 + z + z^2 = 1 + \overline{z} + \overline{z}^2 \Leftrightarrow z - \overline{z} + z^2 - \overline{z}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - \overline{z})(1 + z + \overline{z}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \overline{z} \\ \textbf{ou} \\ z + \overline{z} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \in \mathbb{R} \\ \textbf{ou} \\ \mathrm{Re}(z) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Donc $\boxed{F = \mathbb{R} \cup \left\{ -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,y \ / \ y \in \mathbb{R} \right\}}$.

2) On reconnait la somme des termes d'une suite géormétrique de raison z de premier terme 1:

$$\boxed{S_n(1) = n \qquad \text{et} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \ S_n(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z}}.$$

3) Soit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{n}}$ et $n \geqslant 2$.

-a- $z \neq 1$ donc d'après le 2) $S_n(z) = \dfrac{1 - z^n}{1 - z} = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}}{1 - z}$ d'où $\boxed{S_n(z) = \dfrac{2}{1 - z}}$.

-b- On écrit $S_n(z)$ sous forme $\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ où $\rho \geqslant 0$,

$$S_n(z) = \frac{2}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2n}} \left(\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2n}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2n}} \right)} = \frac{2\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2n}}}{-2\,\mathrm{i} \sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Or $\dfrac{\pi}{2n} \in]0, \pi[$ donc $\sin \dfrac{\pi}{2n} > 0$ d'où $\boxed{|S_n(z)| = \dfrac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}}}$. Puis $\boxed{\mathrm{Arg}(S_n(z)) = -\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{\pi}{2} \ [2\pi]}$

4) -a- Soit $z \in \mathbb{U}$. Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: "$|S_n(z)| \leqslant n$".
Initialisation. Pour $n = 1$, $|S_1(z)| = |1| = 1 \leqslant 1$. D'où $\mathcal{P}_1$ vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} |S_{n+1}(z)| = |1 + z + \cdots z^{n-1} + z^n| &\leqslant \underbrace{|1 + z + \cdots z^{n-1}|}_{=|S_n(z)|} + \underbrace{|z^n|}_{=|z|^n=1} \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant n + 1 \qquad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence).} \end{aligned}$$

Conclusion. $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ |S_n(z)| \leqslant n}$.

-b- $1 \in \mathbb{U}$ et $S_n(1) = n$. $\boxed{\text{La borne est donc atteinte en 1}}$.

5) -a- Soit $z \in \mathbb{U}_{n-1} \setminus \{1\}$. Clairement $z \in \mathbb{U}$, puis comme $z^{n-1} = 1$ et $z \neq 1$

$$S_n(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1 - z^{n-1}z}{1 - z} = \frac{1 - z}{1 - z} = 1. \qquad \text{D'où } |S_n(z)| = 1.$$

Soit $z \in \mathbb{U}_{n+1} \setminus \{1\}$. Clairement $z \in \mathbb{U}$, puis comme $z^{n+1} = 1$ et $z \neq 1$

$$S_n(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1 - z^{n+1}\frac{1}{z}}{1 - z} = \frac{1 - \frac{1}{z}}{1 - z} = \frac{\frac{z-1}{z}}{1 - z} = -\frac{1}{z}. \qquad \text{D'où } |S_n(z)| = \frac{1}{|z|} = 1.$$

Dans les deux cas, on a bien $\boxed{z \in \Gamma}$.

-b- Soit $z \in \Gamma$. Alors $z \neq 1$ car $S_n(1) = n$ et $n \geqslant 2$. Donc $1 = |S_n(z)| = \dfrac{|1 - z^n|}{|1 - z|}$ d'où $\boxed{|1 - z^n| = |1 - z|}$.

Puis

$$\begin{aligned}
&|1-z^n|^2 = |1-z|^2 \text{ car les modules sont des réels positifs.}\\
&(1-z^n)\overline{(1-z^n)} = (1-z)\overline{(1-z)}\\
&(1-z^n)(1-\overline{z}^n) = (1-z)(1-\overline{z})\\
&1-z^n-\overline{z}^n+\underbrace{|z^n|^2}_{=|z|^{2n}=1} = 1-z-\overline{z}+\underbrace{|z|^2}_{=1}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{z^n+\overline{z}^n = z+\overline{z}}$.

-c- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Notons (E') l'équation $\cos(n\theta) = \cos\theta$.

$$(E') \Leftrightarrow \begin{cases} n\theta = \theta \ [2\pi] \\ \textbf{ou} \\ n\theta = -\theta \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n-1)\theta = 0 \ [2\pi] \\ \textbf{ou} \\ (n+1)\theta = 0 \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 0 \ \left[\dfrac{2\pi}{n-1}\right] \\ \textbf{ou} \\ \theta = 0 \ \left[\dfrac{2\pi}{n+1}\right] \end{cases}$$

D'où $\boxed{\text{l'ensemble-solution de } (E') \text{ est } \left\{\dfrac{2k\pi}{n-1} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{2k\pi}{n+1} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}}$. .

-d- Soit $z \in \Gamma$. En particulier, $z \in \mathbb{U}$, posons donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$. Puis d'après 7)-b-, $z^n + \overline{z}^n = z + \overline{z}$, et

$$z^n+\overline{z}^n = z+\overline{z} \Leftrightarrow z^n+\overline{z^n} = z+\overline{z} \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z^n) = 2\mathrm{Re}(z) \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos(n\theta) = \cos\theta \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \theta = \dfrac{2k\pi}{n-1} \\ \textbf{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \theta = \dfrac{2k\pi}{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ z = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n-1}} \\ \textbf{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ z = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n+1}} \end{cases} \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_{n-1} \cup \mathbb{U}_{n+1}.$$

On a donc prouvé $\Gamma \subset \mathbb{U}_{n-1} \cup \mathbb{U}_{n+1}$. Notons que $1 \notin \Gamma$ car $S_n(1) = n \geqslant 2$ d'où $|S_n(1)| \neq 1$. Donc $\Gamma \subset \mathbb{U}_{n-1} \cup \mathbb{U}_{n+1} \setminus \{1\}$.
Puis en 7)-a-, on a montré $\mathbb{U}_{n-1} \cup \mathbb{U}_{n+1} \setminus \{1\} \subset \Gamma$.
Finalement, $\boxed{\Gamma = \mathbb{U}_{n-1} \cup \mathbb{U}_{n+1} \setminus \{1\}}$.

Exercice 3

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} - \dfrac{1}{2} = e^{i\theta}\left(z_n - \dfrac{1}{2}\right)$

$\boxed{M_{n+1} \text{ est l'image de } M_n \text{ par la rotation de centre } \Omega \text{ d'affixe } \dfrac{1}{2} \text{ et d'angle de mesure } \theta.}$

2) Il sort pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = e^{i\theta} w_n$.

$\boxed{(w_n)_n \text{ est la suite géométrique de premier terme } \dfrac{1}{2} \text{ et de raison } e^{i\theta}.}$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = e^{in\theta} w_0 = \dfrac{1}{2} e^{in\theta}$.

Ainsi $z_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} e^{in\theta}$.

$$\boxed{z_n = \cos\frac{n\theta}{2} e^{i\frac{n\theta}{2}}}.$$

On a bien sûr factorisé par l'angle moitié.

4) Pour tout entier $n \geqslant 0$, $S_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1+e^{ik\theta}}{2} = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k$

$\underline{e^{i\theta} \neq 1}$ car $\theta \in]0, 2\pi[$ donc $S_n(\theta)\dfrac{1}{2}(n+1) + \dfrac{1}{2}\dfrac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$

En factorisant par l'angle moitié,

$$S_n(\theta) = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2}\frac{2i\sin\frac{n+1}{2}\theta}{2i\sin\frac{\theta}{2}} e^{i\frac{n\theta}{2}}.$$

$$\boxed{S_n(\theta) = \frac{n+1}{2} + \frac{e^{in\frac{\theta}{2}}\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{2\sin(\frac{\theta}{2})}}.$$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)} e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\left| T_n(\theta) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2(n+1)} \frac{|\sin \frac{n+1}{2}\theta|}{|\sin \frac{\theta}{2}|}$$

$$\left| T_n(\theta) - \frac{1}{2} \right| \leqslant \frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

En effet $\left| \sin \frac{n+1}{2}\theta \right| \leqslant 1$ et $\sin \frac{\theta}{2} > 0$ car $\theta \in]0, 2\pi[$ (on ne l'utilise pas, on peut garder la valeur absolue).

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} = 0$. D'après le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left| T_n(\theta) - \frac{1}{2} \right| = 0}$.

6) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall \theta \in]0, 2\pi[, \quad T_n(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{e^{in\theta}}{2} \times \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\frac{n+1}{2}\theta} \times \frac{\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

En utilisant $\lim\limits_{\theta\to 0} e^{in\theta} = 1$ et $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ on obtient

$$\boxed{\lim_{\theta\to 0} T_n(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1}.$$

7) On déduit des questions 5 et 6

$\lim\limits_{\theta\to 0} \left(\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(\theta) \right) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\lim\limits_{\theta\to 0} T_n(\theta) \right) = 1$.

Moralité. On ne peut pas "intervertir" les limites n'importe comment.

Exercice 4. Fonctions trigonométriques.

1) Première méthode: Étude de fonction.

-a- Comme Arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, alors pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1, 1] \\ \frac{1-x}{1+x} \geqslant 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x \in]-1, 1].$$

Donc $\boxed{f \text{ est définie sur }]-1, 1]}$.

Puis

- $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ est continue sur $]-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$
- $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
- $2\,\text{Arctan}$ est continue sur $\mathbb{R}$

donc par composition puis somme avec Arcsin continue sur $]-1, 1]$, on obtient $\boxed{f \text{ est continue sur }]-1, 1]}$.

-b- Comme Arcsin dérivable sur $]-1, 1[$, $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ s'annule en 1, en adaptant le raisonnement de 1)-a- en remplaçant continue par dérivable on obtient, $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-1, 1[}$.

-c- Soit $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2\frac{\frac{\frac{-2}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2\frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{\frac{2}{1+x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\frac{1}{1+x}}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = 0.}$$

-d- Comme f' est la fonction nulle sur l'intervalle $]-1, 1[$ alors f est constante sur $]-1, 1[$, et par continuité de f sur $]-1, 1]$, f

est constante sur $]-1,1]$.
Or $f(0) = \operatorname{Arcsin}(0) + 2\operatorname{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{2}$.
En conclusion : $\boxed{\forall x \in]-1,1],\ f(x) = \dfrac{\pi}{2}}$.

2) <u>Deuxième méthode:</u> Avec des fonctions hyperboliques.

-a- Soit $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{1-\operatorname{th} y}{1+\operatorname{th} y} &= \frac{1-\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}}{1+\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}}\\ &= \frac{2}{2\,e^{2y}}\\ \boxed{\frac{1-\operatorname{th} y}{1+\operatorname{th} y} = e^{-2y}}\end{aligned}.$$

-b- Soit $y \in \mathbb{R}$, on pose $\theta = \operatorname{Arctan}\left(e^{-y}\right)$,

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) &= \cos(2\theta)\\ &= 2\cos^2(\theta) - 1\\ &= \frac{2}{1+\tan^2\theta} - 1\\ &= \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}.\end{aligned}$$

Et donc en remplaçant et en utilisant

$$\tan(\operatorname{Arctan}\left(e^{-y}\right)) = e^{-y}$$

il vient

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{Arctan}\left(e^{-y}\right)\right) &= \frac{1-e^{-2y}}{1-e^{-2y}} \times \frac{e^{2y}}{e^{2y}}\\ \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{Arctan}\left(e^{-y}\right)\right) = \operatorname{th}(y)}\end{aligned}.$$

-c- On utilise : $\forall a \in [-1,1]$, $\sin(\operatorname{Arcsin}(a)) = a$, avec $a = \operatorname{th}(y) \in [-1,1]$, et donc d'après 2)-b-,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{Arctan}\left(e^{-y}\right)\right) = \sin(\operatorname{Arcsin}(\operatorname{th}(y))).$$

Puis d'une part, $\operatorname{Arcsin}(\operatorname{th}(y)) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
D'autre part, $e^{-y} > 0$ donc $\operatorname{Arctan}\left(e^{-y}\right) \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $\dfrac{\pi}{2} - 2\operatorname{Arctan}\left(e^{-y}\right) \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\subset \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Enfin comme :

$$\forall (a,b) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^2, \quad \sin(a) = \sin(b) \Rightarrow a = b$$

car sin réalise une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1,1]$, il découle de ce qui précède que

$$\boxed{\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{Arctan}\left(e^{-y}\right) = \operatorname{Arcsin}(\operatorname{th} y).}$$

-d- Soit $x \in]-1,1[$.
En tant que fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-1,1[$, th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$, et donc $\boxed{\text{il existe un unique } y \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = \operatorname{th} y.}$

-e- On fait la synthèse des questions précédentes, on utilise 2)-c-, en y remplaçant $\operatorname{th}(y) = x$ d'après 2)-d- et

$$e^{-y} = \sqrt{e^{-2y}} = \sqrt{\frac{1-\operatorname{th} y}{1+\operatorname{th} y}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \text{(d'après 2)-a-).}$$

On obtient finalement,

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arcsin}(x) + 2\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\pi}{2}} \quad (*).$$

Pour $x = 1$, on vérifie facilement $\operatorname{Arcsin}(1) + 2\operatorname{Arctan}\sqrt{0} = \dfrac{\pi}{2}$, la relation $(*)$ est donc vérifiée pour $x \in]-1,1]$.