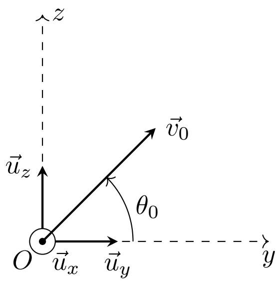
DS n° 2 de Physique-Chimie

Durée : 3h

Calculatrice interdite

1 Tir d'un projectile dans le champ de pesanteur

Un projectile assimilé à un point matériel M de masse m est lancé à partir du sol en O avec un vecteur-vitesse initial $\vec{v}_0 \in (O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, faisant un angle θ_0 avec l'horizontale, dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. On note g la norme du champ de pesanteur.



Le symbole $\odot$ représente un vecteur orthogonal à la feuille orienté vers le lecteur.

1. Rappeler la définition d'un référentiel galiléen. Dans quelle mesure le référentiel terrestre peut-il être supposé galiléen ?

1.1 Tir sans frottements

2. Établir les équations horaires du mouvement $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. En déduire que le mouvement est plan.
3. En déduire l'équation $z(y)$ de la trajectoire.
4. Tracer l'allure de la trajectoire. Faire figurer le vecteur $\vec{v}_0$.
5. Déterminer les coordonnées y_S et z_S du sommet S de la trajectoire.
6. Définir la portée ℓ du tir et établir son expression.
7. Quel est l'angle θ_0 assurant un tir de portée maximale ?
8. Montrer que $\frac{1}{\cos^2\theta_0} = 1 + \tan^2\theta_0$.
9. Pour une vitesse v_0 donnée, montrer qu'il existe un angle θ_0 permettant d'atteindre le point P de coordonnées $(0, y, z)$ si P se trouve en dessous d'une courbe, dite de sureté, dont on établira l'équation $z_\mathrm{s}(y)$.
10. Sur un schéma, représenter la courbe de sureté, un point P sous la courbe de sureté, ainsi que les 2 trajectoires permettant d'atteindre P, pour v_0 donnée.

1.2 Tir avec frottements

On considère maintenant que le projectile est soumis à une force de frottements proportionnelle à la vitesse : $\overrightarrow{f} = -\alpha\vec{v}$ avec $\alpha > 0$.

11. Établir les trois équations différentielles vérifiées par les coordonnées v_x, v_y et v_z du vecteur vitesse. Identifier le temps caractéristique τ du mouvement.
12. En déduire les expressions de $v_x(t)$, $v_y(t)$ et $v_z(t)$, puis de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, en fonction de g, τ, v_0, θ_0 et t.
13. Dans la situation où $t \ll \tau$, simplifier les équations horaires $y(t)$ et $z(t)$, en utilisant l'approximation $1 - e^{-u} \underset{u \ll 1}{\approx} u$.
14. Dans la situation où $t \gg \tau$, simplifier les équations horaires $y(t)$ et $z(t)$.
15. Représenter les deux trajectoires asymptotiques obtenues pour $t \ll \tau$ et $t \gg \tau$. En déduire l'allure de la trajectoire complète, dans une situation où le temps de vol est grand devant τ.
16. En déduire une estimation de la portée dans ce cas, en fonction de v_0, τ et θ_0.

2 Polluants atmosphériques

17. Le soufre se situe dans la troisième période et la seizième colonne du tableau périodique. En déduire son nombre d'électrons de valence. Comparer son électronégativté avec celle de l'oxygène.
18. Les oxydes suivants sont des polluants atmosphériques émis par les véhicules à moteur :

    (a) monoxyde de carbone CO (b) monoxyde d'azote NO
    (c) dioxyde de soufre SO_2 (d) trioxyde de soufre SO_3

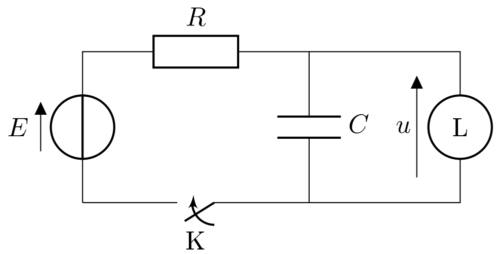
    Pour chacune de ces molécules, proposer un schéma de Lewis, en déduire sa géométrie, prévoir si elle est polaire et indiquer le sens et la direction de son moment dipolaire.

3 Oscillations d'une lampe à décharge

Une lampe à décharge est une lampe électrique contenant un gaz à basse pression. Sous l'effet d'une forte tension, les atomes du gaz sont ionisés et émettent un rayonnement visible ou ultraviolet en revenant dans leur état fondamental. On modélise une lampe à décharge de la manière suivante :

— Lorsque la lampe est éteinte, elle se comporte comme un interrupteur ouvert.
— La lampe s'allume lorsque la tension à ses bornes devient supérieure à la tension d'allumage U_a.
— Lorsque la lampe est allumée, elle se comporte comme une résistance r.
— La lampe s'éteint lorsque la tension à ses bornes devient inférieure à la tension d'extinction U_e ($U_e < U_a$).

Une lampe à décharge L est utilisée dans le montage suivant. La source idéale délivre une tension $E > U_a > U_e$.



Le condensateur est initialement déchargé. A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

19. La lampe L est-elle initialement éteinte ou allumée ?

On considère la première phase durant laquelle la lampe L est éteinte.

20. Établir la loi $u(t)$, en fonction de E, t et d'un temps caractéristique τ que l'on exprimera en fonction de R et C.
21. Déterminer l'instant t_a auquel L s'allume, en fonction de τ, E et U_a.
22. Représenter l'allure du graphe $u(t)$, pour $t \leq t_a$. Faire apparaître E, U_a, τ et t_a sur le graphe.
23. Faire un bilan de puissance durant cette première phase. Donner la signification physique de chaque terme.
24. Déterminer le travail fourni par la source W_f, l'énergie recue par le condensateur W_r et le travail dissipé par effet Joule W_J, entre $t = 0$ et t_a, en fonction C, E, et U_a.

On considère la deuxième phase durant laquelle L est allumée.

25. Montrer que u vérifie une équation différentielle de la forme :
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau'} = \frac{E'}{\tau'}$$
où τ' et E' sont des constantes que l'on exprimera en fonction de R, r, C et E.
26. En déduire la loi $u(t)$ pour $t \geq t_a$, en fonction de $t - t_a$, τ', E' et U_a.
27. Établir la condition sur U_e et E' pour que L s'éteigne. Exprimer l'instant t_e, auquel la lampe s'éteint, en fonction de t_a, τ', U_a, U_e et E'.

On suppose la condition précédente vérifiée. On considère la troisième phase durant laquelle L est à nouveau éteinte.

28. Établir la loi $u(t)$ pour $t > t_e$ en fonction de $t - t_e$, τ, E et U_e.
29. Que se passe-t-il ensuite ? Représenter l'allure du graphe $u(t)$ depuis la fermeture de l'interrupteur.
30. Déterminer la période T des oscillations en fonction de E, U_a, U_e, E', τ et τ'.

Correction du DS n° 2

1 Tir d'un projectile dans le champ de pesanteur

1. Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel s'applique le principe d'inertie, c'est-à-dire dans lequel un point matériel est en mouvement rectiligne uniforme si et seulement si il est soumis à des forces qui se compensent.
Le référentiel terrestre peut être supposé galiléen pour des mouvements dont la durée est négligeable devant la période de rotation de la Terre, 24 h.

1.1 Tir sans frottements

2. Repérage : $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$, d'où $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$ et $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$.
Le projectile n'est soumis qu'à son poids $\overrightarrow{P} = -mg\vec{u}_z$.

D'après le principe fondamental de la dynamique, $m\vec{a} = \overrightarrow{P}$, d'où $\vec{a} = -g\vec{u}_z$, soit $\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$

On intègre entre 0 et t : $\begin{cases} \dot{x}(t) - \dot{x}(0) = 0 \\ \dot{y}(t) - \dot{y}(0) = 0 \\ \dot{z}(t) - \dot{z}(0) = -gt \end{cases}$

Or $\vec{v}_0 = v_0[\cos(\theta_0)\vec{u}_y + \sin(\theta_0)\vec{u}_z]$, donc $\begin{cases} \dot{x}(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = v_0\cos(\theta_0) \\ \dot{z}(0) = v_0\sin(\theta_0) \end{cases}$

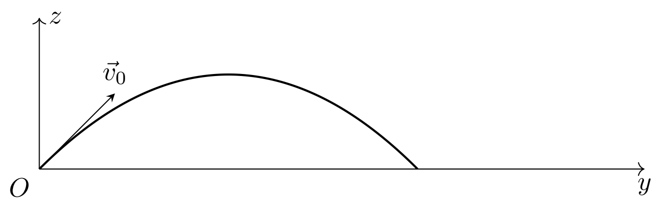
Donc $\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = v_0\cos(\theta_0) \\ \dot{z}(t) = -gt + v_0\sin(\theta_0) \end{cases}$

On intègre entre 0 et t : $\begin{cases} x(t) - x(0) = 0 \\ y(t) - y(0) = v_0\cos(\theta_0)t \\ z(t) - z(0) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\theta_0)t \end{cases}$

Or $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$, ainsi $\boxed{\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = v_0\cos(\theta_0)t \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\theta_0)t \end{cases}}$

3. $t = \dfrac{y}{v_0\cos(\theta_0)}$ donc $\boxed{z = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2(\theta_0)}y^2 + \tan(\theta_0)y}$

4.



5. On cherche t_S tel que $\dot{z}(t_S) = 0$, soit $-gt_S + v_0\sin(\theta_0) = 0$ d'où $t_S = \frac{v_0\sin(\theta_0)}{g}$.
$y_S = y(t_S) = \frac{v_0^2}{g}\sin(\theta_0)\cos(\theta_0)$ soit $\boxed{y_S = \frac{v_0^2}{2g}\sin(2\theta_0)}$

et $z_S = z(t_S) = -\frac{v_0^2}{2g}\sin^2(\theta_0) + \frac{v_0^2}{g}\sin^2(\theta_0)$, soit $\boxed{z_S = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2(\theta_0)}$

6. La portée est la distance à laquelle retombe le projectile. Par symétrie, $\boxed{\ell = 2y_S = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta_0)}$
7. La portée est maximale pour $\sin(2\theta_0)$ maximal, donc pour $2\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ soit $\boxed{\theta_0 = \frac{\pi}{4}}$
8. $\dfrac{1}{\cos^2\theta_0} = \dfrac{\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0}{\cos^2\theta_0} = 1 + \tan^2\theta_0$
9. L'équation de la trajectoire se réécrit : $z = -\dfrac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\theta_0)y^2 + \tan(\theta_0)y$, soit

$$\frac{gy^2}{2v_0^2}\tan^2(\theta_0) - y\tan(\theta_0) + z + \frac{gy^2}{2v_0^2} = 0$$

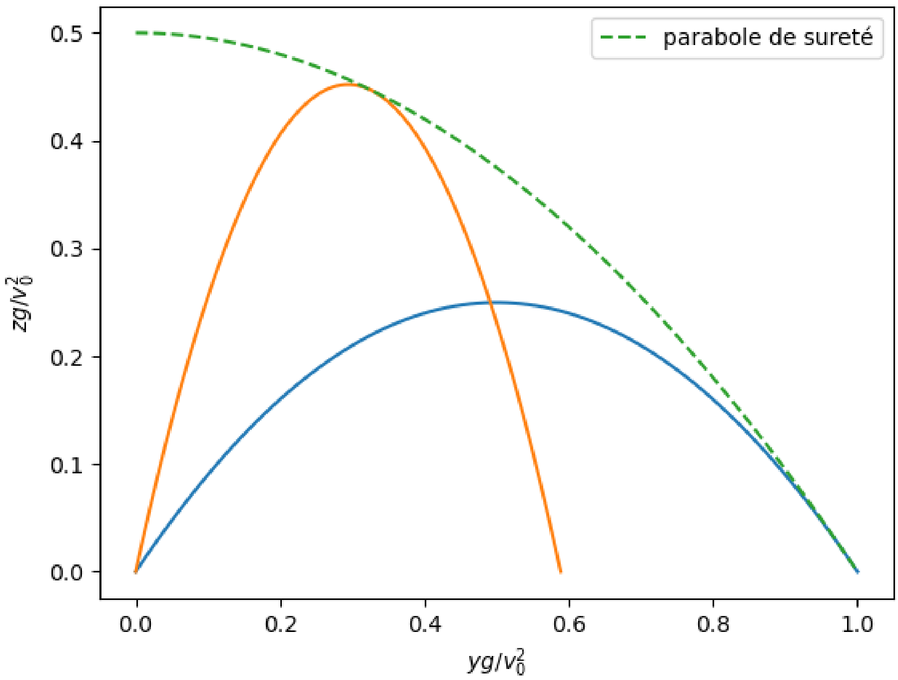
C'est une équation du second degré sur $\tan\theta_0$, de discriminant : $\Delta = y^2 - 2\dfrac{gy^2}{v_0^2}\left(z + \dfrac{gy^2}{2v_0^2}\right)$.

Il existe des solutions (réelles) ssi $\Delta \geq 0$, c'est-à-dire ssi $2\dfrac{gy^2}{v_0^2}\left(z + \dfrac{gy^2}{2v_0^2}\right) \leq y^2$

c'est-à-dire ssi $z \leq \boxed{\dfrac{v_0^2}{2g} - \dfrac{g}{2v_0^2}y^2 = z_s(y)}$.

La fonction tan réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}_+$, donc il existe aussi des solutions pour θ_0.

10. C'est l'équation d'une parabole d'axe Oz.



1.2 Tir avec frottements

11. Le projectile est soumis à son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ et à la force de frottement $\vec{f} = -\alpha(v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z)$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f}$

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = -\alpha v_x \\ m\dot{v}_y = -\alpha v_y \\ m\dot{v}_z = -mg - \alpha v_z \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{\begin{cases} \dot{v}_x + \frac{\alpha}{m}v_x = 0 \\ \dot{v}_y + \frac{\alpha}{m}v_y = 0 \\ \dot{v}_z + \frac{\alpha}{m}v_z = -g \end{cases}}$$ On identifie le temps caractéristique : $\tau = \frac{m}{\alpha}$

12. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions : $v_h(t) = Ae^{-t/\tau}$.
On cherche une solution particulière constante de l'équation sur v_z : $v_{zp} = -g\tau$.

Les solutions sont donc $\begin{cases} v_x = Ae^{-t/\tau} \\ v_y = Be^{-t/\tau} \\ v_z = Ce^{-t/\tau} - g\tau \end{cases}$

Or $\vec{v}_0$ a pour coordonnées $\begin{cases} v_x(0) = A = 0 \\ v_y(0) = B = v_0\cos(\theta_0) \\ v_z(0) = C - g\tau = v_0\sin(\theta_0) \end{cases}$ donc $\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = v_0\cos(\theta_0)e^{-t/\tau} \\ v_z = [v_0\sin(\theta_0) + g\tau]e^{-t/\tau} - g\tau \end{cases}$

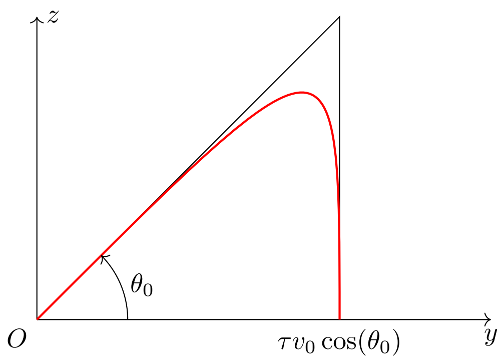
On intègre entre 0 et t : $\begin{cases} x(t) - x(0) = 0 \\ y(t) - y(0) = -\tau v_0\cos(\theta_0)(e^{-t/\tau} - 1) \\ z(t) - z(0) = -\tau[v_0\sin(\theta_0) + g\tau](e^{-t/\tau} - 1) - g\tau t \end{cases}$

Or $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$, ainsi $\boxed{\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = \tau v_0\cos(\theta_0)(1 - e^{-t/\tau}) \\ z(t) = \tau[v_0\sin(\theta_0) + g\tau](1 - e^{-t/\tau}) - g\tau t \end{cases}}$

13. $1 - e^{-t/\tau} \underset{t\ll\tau}{\approx} \frac{t}{\tau}$ donc $\boxed{\begin{cases} y(t) \underset{t\ll\tau}{\approx} v_0\cos(\theta_0)t \\ z(t) \underset{t\ll\tau}{\approx} v_0\sin(\theta_0)t \end{cases}}$

14. $e^{-t/\tau} \underset{t\gg\tau}{\to} 0$ donc $\boxed{\begin{cases} y(t) \underset{t\gg\tau}{\approx} \tau v_0\cos(\theta_0) \\ z(t) \underset{t\gg\tau}{\approx} \tau[v_0\sin(\theta_0) + g\tau] - g\tau t \end{cases}}$

15.

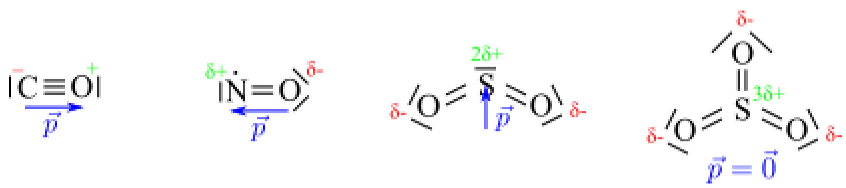


16. Une estimation de la portée est donc $\tau v_0\cos(\theta_0)$

2 Polluants atmosphériques

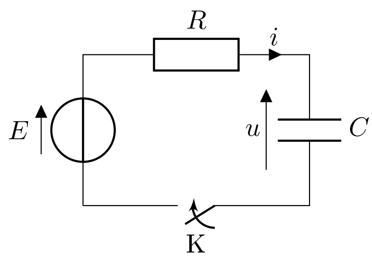
17. Le soufre a 6 électrons de valence. Il se trouve juste en dessous de l'oxygène donc il est moins électronégatif que l'oxygène.

18. $CO : N_v = 10$ $\quad NO : N_v = 11$ $\quad SO_2 : N_v = 18$ $\quad SO_3 : N_v = 24$



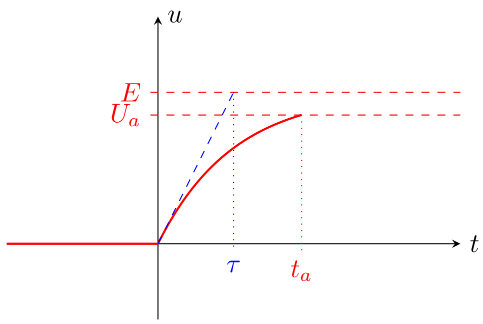
3 Oscillations d'une lampe à décharge

19. Le condensateur est initialement déchargé, donc $u(0^-) = 0 < U_e$, donc la lampe est éteinte.
20.



Loi des mailles : $E = Ri + u$
Or $i = C\dot{u}$, donc $E = RC\dot{u} + u$, soit $\dot{u} + \frac{u}{RC} = \frac{E}{RC}$
On identifie $\boxed{\tau = RC}$
Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions : $u_h(t) = Ae^{-t/\tau}$
Une solution particulière constante est : $u_p = E$
Donc $u(t) = Ae^{-t/\tau} + E$
La tension aux bornes du condensateur est continue, donc $u(0^+) = A + E = u(0^-) = 0$
Ainsi, $\boxed{u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})}$

21. La lampe s'allume lorsque $u = U_a$, d'où $E(1 - e^{-t_a/\tau}) = U_a$, soit $\boxed{t_a = \tau \ln(\frac{E}{E-U_a})}$
22.

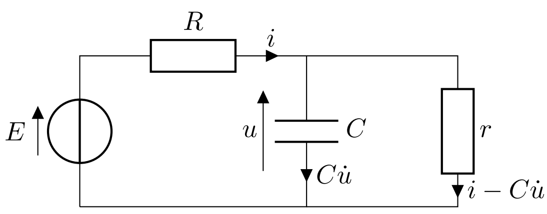


23. On multiplie la loi des mailles par $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$: $Ei = Ri^2 + uC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, soit $\boxed{Ei = Ri^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}Cu^2)}$.
Ei est la puissance fournie par la source.
Ri^2 est la puissance recue par la résistance, dissipée par effet Joule.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}Cu^2)$ est la puissance recue par le condensateur.
24. $W_r = \int_0^{t_a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}Cu^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}CU_a^2$
$W_f = \int_0^{t_a} Ei\mathrm{d}t = \int_0^{t_a} EC\dot{u}\mathrm{d}t = ECU_a$

$$\int_0^{t_a} Ei\mathrm{d}t = \int_0^{t_a} Ri^2\mathrm{d}t + \int_0^{t_a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}Cu^2)\mathrm{d}t$$

donc $\boxed{W_J = W_f - W_r = CU_a(E - \frac{U_a}{2})}$

25.



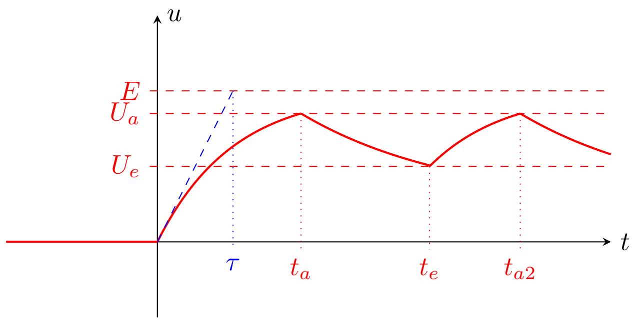
Lois des mailles : $E - Ri - u = 0$ et $u - r(i - C\dot{u}) = 0$
donc $u - r(\frac{E-u}{R} - C\dot{u}) = 0$, c'est-à-dire $\dot{u} + (\frac{1}{r} + \frac{1}{R})\frac{u}{C} = \frac{E}{RC}$
On identifie $\boxed{\tau' = \frac{rRC}{r+R} \text{ et } E' = \frac{rE}{r+R}}$

26. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions : $u_h(t) = Ae^{-t/\tau'}$
Un solution particulière constante est : $u_p = E'$
Donc $u(t) = Ae^{-t/\tau'} + E'$
Or $u(t_a) = Ae^{-t_a/\tau'} + E' = U_a$, d'où $A = (U_a - E')e^{t_a/\tau'}$
Ainsi $\boxed{u(t) = (U_a - E')e^{-(t-t_a)/\tau'} + E'}$

27. $u(t)$ tend vers E', donc la lampe s'éteint si $\boxed{E' < U_e}$.
$u(t_e) = U_e$, c'est-à-dire $(U_a - E')e^{-(t_e-t_a)/\tau'} + E' = U_e$, d'où $\boxed{t_e = t_a + \tau' \ln\left(\frac{U_a - E'}{U_e - E'}\right)}$

28. A $t > t_e$, on revient dans la configuration de la 1ère phase, donc $u(t) = Ae^{-t/\tau} + E$.
Or $u(t_e) = Ae^{-t_e/\tau} + E = U_e$, d'où $A = (U_e - E)e^{t_e/\tau}$.
Ainsi, $\boxed{u(t) = (U_e - E)e^{-(t-t_e)/\tau} + E}$

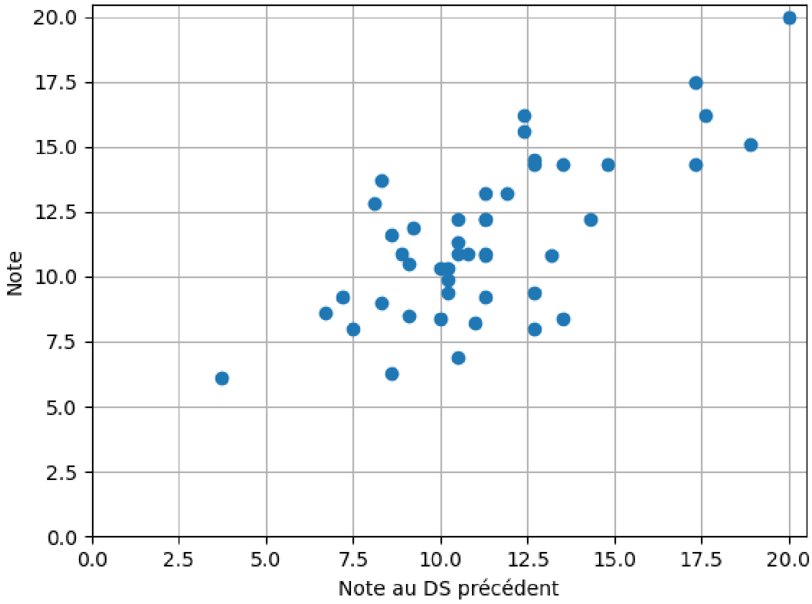
29. Le condensateur se charge à nouveau jusqu'à $u = U_a$ et la lampe se rallume. Puis le condensateur se décharge jusqu'à $u = U_e$ et la lampe s'éteint à nouveau, et ainsi de suite.



30. La période des oscillations est $T = t_{a2} - t_a$.
$t_e = t_a + \tau' \ln\left(\frac{U_a - E'}{U_e - E'}\right)$.
On cherche t_{a2} tel que $u(t_{a2}) = (U_e - E)e^{-(t_{a2}-t_e)/\tau} + E = U_a$, d'où $t_{a2} = t_e + \tau \ln\left(\frac{U_e - E}{U_a - E}\right)$
Ainsi, $\boxed{T = \tau' \ln\left(\frac{U_a - E'}{U_e - E'}\right) + \tau \ln\left(\frac{U_e - E}{U_a - E}\right)}$

Commentaires du DS n° 2 de Physique-Chimie

Moyenne : 11,5/20
Max : 20/20



2. Il y a 2 manières de montrer que le mouvement est plan :
   — celle suggérée par l'énoncé, à savoir intégrer l'équation du mouvement selon $\vec{u}_x$ et en déduire que x est constant
   — vérifier que le vecteur vitesse initial et la résultante des forces sont dans un même plan.

   Lorsqu'on intègre une expression, il ne faut pas oublier l'élément différentiel. C'est d'autant plus important en physique que l'élément différentiel est dimensionné et permet de conserver l'homogénéité : $\left[\int \ddot{z}\mathrm{d}t\right] = \mathrm{L.T^{-2}.T} = \mathrm{L.T^{-1}}$ et $\left[\int \dot{z}\mathrm{d}t\right] = \mathrm{L.T^{-1}.T} = \mathrm{L}$.
5. Le sommet de la trajectoire est atteint lorsque la coordonnée v_z selon $\vec{u}_z$ du vecteur vitesse s'annule et non, ~~lorsque la vitesse~~ $\cancel{v\left(=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\right)}$ ~~s'annule~~.
6. Lorsqu'un des termes d'une équation du second degré, de la forme $ay^2 + by = c = 0$, est nul, il n'est pas utile de passer par le discriminant pour obtenir les solutions.
   — Si $c = 0$, on peut factoriser par y.
   — Si a ou $b = 0$, on peut directement isoler y.
9. Il est regrettable qu'aussi peu d'étudiants aient su retrouver l'équation de la parabole de sureté, cette question ayant été traitée en classe. Faire et refaire les exercices est le meilleur (si ce n'est le seul...) moyen de progresser.
10. A v_0 fixée, toutes les trajectoires sont tangentes à la parabole de sureté.
    — Pour $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, le point de tangence a pour coordonnées $y = \ell$ et $z = 0$.
    — Pour $\theta_0 > \frac{\pi}{4}$, le point de tangence est avant la portée.
    — Pour $\theta_0 < \frac{\pi}{4}$, le point de tangence est après la portée (donc pour $z < 0$).
17. Ahh je souffre ! L'élément soufre ne prend qu'un seul « f ». Ce n'est pas faute de vous avoir prévenu...
18. Évitez de mélanger la représentation de Lewis et la représentation de Cram (en perspective), notamment quand il y a des liaisons multiples.
19. La loi des mailles ne permet pas de déterminer $u(0^-)$, car la tension aux bornes de l'interrupteur K ouvert est inconnue.
20. Les déterminations de $i(0^-)$ et $i(0^+)$ ne sont pas utiles pour établir $u(t)$, i n'étant pas une grandeur nécessairement continue ici. L'étude quand $t \to +\infty$ n'est pas indispensable non plus, bien qu'elle permette de vérifier la solution particulière.
21. La phrase « La lampe s'allume lorsque u devient positive » est parfois mal comprise.
    En effet, pour trouver t_a, il ne faut pas résoudre $\cancel{u(t_a) \geq U_a}$, mais $u(t_a) = U_a$.
    On peut éventuellement résoudre l'inégalité : $u(t) \geq U_a \Leftrightarrow t \geq \tau \ln(\frac{E}{E-U_a})$, on en déduit alors $t_a = \tau \ln(\frac{E}{E-U_a})$ et certainement pas $\cancel{t_a \geq \tau \ln(\frac{E}{E-U_a})}$.
24. Là encore, l'élément différentiel est indispensable : ui est homogène à une puissance, $ui\mathrm{d}t$ à une énergie.
27. Lorsqu'on prend le logarithme d'une expression, il faut s'assurer qu'elle est positive. Ici, $t_e = t_a + \tau' \ln(\frac{U_a - E'}{U_e - E'})$; vérifier $\frac{U_a-E'}{U_e-E'} > 0$ est une autre manière d'obtenir la condition d'extinction de la lampe.