Chapitre - Suites

I Rappels et compléments sur les suites réelles

I.1 Suites réelles et opérations

Définition (Suites réelles et opérations)

- Une suite réelle est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: $\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$.

  La suite u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$, u_n est le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- On définit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

  (i) l'addition: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

  (ii) le produit: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

  (iii) la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Remarques (Suite définie à partir d'un certain rang)

Une suite peut être définie sur $\mathbb{N}^*$ ou à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ (abrégé apcr dans ce cours). On note alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ ou même (u_n) s'il n'y a pas d'ambiguité.

⚠ **Attention** ⚠ Il faut impérativement distinguer u_n de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, donc une application...
- u_n est le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est un réel.

Cette distinction est identique à celle faite sur les fonctions, à savoir qu'il ne faut pas confondre la fonction f avec son expression $f(x)$. On n'écrira donc **JAMAIS**, "la suite u_n", mais on écrira "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$".

Exemples On peut définir, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, explicitement, par son expression/terme général:

$$u_n = \frac{2+n}{1+n^2}, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

On peut aussi la définir, par une relation de récurrence:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}, \quad u_0 = 1,\ u_1 = 2u_0 + 1 = 3,\ u_2 = 7,\ u_3 = 15,\ \ldots.$$

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_0 = 1,\ u_1 = 1 \end{cases}, \quad u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ u_4 = 5,\ \ldots.$$

☞ **Explication** ☜ Représentation graphique d'une suite.

I.2 Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques

Théorème-Définition (Suites arithmétiques - Suites géométriques)

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{R}$ (appelé raison) telle que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\text{resp. } \forall n \geqslant n_0)\ \ u_{n+1} = u_n + r.$$

Le terme général de la suite est : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr \quad (\text{resp. } \forall n \geqslant n_0,\ u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r)$.

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** s'il existe $q \in \mathbb{R}$ (appelé raison) telle que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\text{resp. } \forall n \geqslant n_0)\ \ u_{n+1} = qu_n.$$

Le terme général de la suite est : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n \quad (\text{resp. } \forall n \geqslant n_0,\ u_n = u_{n_0} q^{n-n_0})$.

Théorème-Définition (Suites arithmético-géométriques)

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 1$ telle que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

✎ Méthode pratique ✎ (Obtenir le terme général d'une suite arithmético géométrique)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b\ \ (*)$.

- ▶ On détermine le point fixe α, vérifiant l'équation $\alpha = a\alpha + b\ \ (**)$.
- ▶ On soustrait les relations $(*)$ et $(**)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$.
  La suite $(u_n - \alpha)$ est donc une suite géométrique.
- ▶ Découle alors le terme général : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - \alpha = a^n(u_0 - \alpha)$.

Exercice. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 2$ et $u_0 = 4$.

✎ En pratique ✎ Il faut connaître par coeur le terme général des suites arithmétiques et géométriques. En revanche, pour une suite arithmético-géométrique, il faut savoir retrouver le résultat.

I.3 Suites minorées, majorées, bornées

Définition (Suites minorées, majorées, bornées)

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est **majorée** si: $\exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est **minorée** si: $\exists m \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est **bornée** si elle est majorée et minorée ce qui équivaut à: $\exists K \in \mathbb{R}^+ / \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant K$.

Remarques (Propriété vraie à partir d'un certain rang)

On dit qu'une propriété d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est vérifiée à partir d'un certain rang si cette propriété est vraie pour tout $n \geqslant n_0$, où $n_0 \in \mathbb{N}$. Par exemple:

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée à partir d'un certain rang, s'il existe $M \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ (le rang) tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant M$ i.e.
$$\exists M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \leqslant M.$$
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{n-2}{n^2+1}$ est positive à partir d'un certain rang (2).

⚠ Attention ⚠ Il est à noter que les majorant et minorant m, M, K sont **indépendants** de n.

I.4 Suites monotones

Définition (Suites monotones)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** (resp. strictement croissante) si: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$).
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** (resp. strictement décroissante) si: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$).
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** (resp. strictement monotone) si elle est croissante (resp. strictement croissante) ou décroissante (resp. décroissante).
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante** si elle est croissante et décroissante c'est-à-dire: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_{n+1}$. Dans ce cas: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang.

✎ Méthode pratique ✎ (Étude de la monotonie)

- ▶ **Méthode 1 :** si $u_n = f(n)$ où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, on utilise les variations de f. Si f est (dé-)croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (dé-)croissante.
- ▶ **Méthode 2 :** on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- ▶ **Méthode 3 :** $\boxed{\text{si la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement positive}}$, on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 .
- ▶ **Méthode 4 :** si aucune des trois méthodes précédentes n'aboutit, on montre la propriété "$u_n \leqslant u_{n+1}$" (ou $\geqslant$) par récurrence.

Remarque : les inégalités sont strictes pour la monotonie.

Exercice : étudier la monotonie des suites u suivantes définies par:

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathrm{e}^n + n^2 + n - 4$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{2^n}{n!}$

5) $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = u_n^2 + 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

I.5 Suites extraites

Définition (Suite extraite)

Une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction **strictement croissante** appelée extractrice.

☞ Explication ☜

1) Une suite extraite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en gros la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de laquelle on retire un certain nombre (fini ou infini) de termes, de sorte qu'il en reste tout de même une infinité. Par exemple considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui consiste à ne garder qu'un terme sur trois de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de u_0 i.e. la suite

$$\underbrace{u_0}_{=v_0}, \cancel{u_1}, \cancel{u_2}, \underbrace{u_3}_{=v_1}, \cancel{u_4}, \cancel{u_5}, \underbrace{u_6}_{=v_2}, \cancel{u_7}, \cancel{u_8}, \underbrace{u_9}_{=v_3}, \cancel{u_{10}}, \cancel{u_{11}}, \underbrace{u_{12}}_{=v_4}, \dots, \underbrace{u_{3n}}_{=v_n}, \dots.$$

On a donc, ici, $\varphi(n) = 3n$.

2) On sera amené à utiliser les suites extraites des termes d'indice pair $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et impair $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

3) **Une propriété utile :** $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$.

⚠ **Attention** ⚠

- La suite $(u_{n^2-n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, car les termes de cette suite sont $u_0, u_0, u_2, \ldots$. Le terme u_0 est répété deux fois ce qui contredit le fait que l'application $n \mapsto n^2 - n$ est strictement croissante.
- La suite $(u_{(n-1)^2})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas, non plus, une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, car les termes de cette suite sont $u_1, u_0, u_1, \ldots$.

II Limite d'une suite

II.1 Limite, convergence, divergence

Définition (Limite d'une suite)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $l \in \mathbb{R}$.

- **Limite finie**. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite l si:
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \,/ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon.$$
On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
- **Limite** $+\infty$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite $+\infty$ si:
$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \,/ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A.$$
On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- **Limite** $-\infty$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite $-\infty$ si:
$$\forall A < 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \,/ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant A.$$
On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **convergente** si elle admet une **limite finie**. Sinon, elle est dite **divergente**.
- Déterminer la **nature** d'une suite, c'est dire si la suite est **convergente** ou **divergente**.

☞ **Explication** ☜

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, si pour tout $\varepsilon > 0$, $u_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ à partir d'un certain rang.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, si pour tout $A > 0$, $u_n \geqslant A$ à partir d'un certain rang.

⚠ **Attention** ⚠

- Les quantificateurs ne doivent pas être inversés dans les définitions ci-dessus.
- La contraire de "tendre vers une limite finie" (i.e. convergent) **n'est pas** "tendre vers une limite infinie".
Plus précisément, une suite qui tend vers $+\infty$ est divergente, en revanche une suite divergente ne tend pas nécessairement vers $+\infty$. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ est divergente.

✎ Méthode pratique ✎ (Comment prouver que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$)

- Pour montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$ à l'aide de la définition :
  - on pose $\varepsilon > 0$, "soit $\varepsilon > 0$"
  - on cherche un rang n_0 à partir duquel $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.
- Pour montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ à l'aide de la définition :
  - on pose $A > 0$, "soit $A > 0$"
  - on cherche un rang n_0 à partir duquel $u_n \geqslant A$.

Théorème

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$. Alors

1) $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \iff |u_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff u_n - l \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) Dans le cas où $l = 0$: $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff |u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |l|$. La réciproque est fausse.

Théorème (Unicité de la limite)

Si la limite d'une suite existe elle est unique.

Exercice.

1) Montrer qu'une suite stationnaire est convergente.

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0.

3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = n^2$ tend vers $+\infty$.

II.2 Limites et inégalités

Théorème (Limite donne une borne)

1) Toute suite convergente est bornée.

2) Toute suite réelle tendant vers $+\infty$ est minorée.

3) Toute suite réelle tendant vers $-\infty$ est majorée.

4) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < l < b$. Alors $a < u_n < b$ à partir d'un certain rang.

☞ **Explication** ☜ On utilisera souvent 4) dans le cas où $l > 0$.
Autrement dit, si $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l > 0$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

⚠ **Attention** ⚠ Quelques contre-exemples :

- une suite bornée non convergente :
- une suite bornée divergente :
- une suite non majorée qui ne tend pas vers $+\infty$:
- une suite convergente qui n'est pas monotone :

Théorème (Passage à la limite d'inégalités)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et $(l,l')\in\mathbb{R}^2$.

Si $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l' \end{cases}$ et $u_n \leqslant v_n$ (ou $u_n < v_n$) à partir d'un certain rang et alors : $\quad l \leqslant l'$.

Cas particulier : on suppose $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

- Si $u_n \leqslant M$ (ou $u_n < M$) alors : $\quad l \leqslant M$
- Si $m \leqslant u_n$ (ou $m < u_n$) alors : $\quad m \leqslant l$.

NB : le passage à la limite d'inégalités strictes donne une inégalité large. Contre-exemples?

III Théorèmes d'existence et de calcul de limite

III.1 Opérations sur les limites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

⚠ **Attention** ⚠ Dans le cas de la forme indéterminée $+\infty-(+\infty)$ tous les cas peuvent se produire:

- $u_n=n+1$, $v_n=n$, alors $u_n-v_n=1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
- $u_n=n^2$, $v_n=n^2+n$, alors $u_n-v_n=-n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$
- $u_n=n^2+n$, $v_n=n^2$, alors $u_n-v_n=n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Multiplication par un scalaire

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n$	λl	$+\infty$ si $\lambda>0$ 0 si $\lambda=0$ $-\infty$ si $\lambda<0$	$-\infty$ si $\lambda>0$ 0 si $\lambda=0$ $+\infty$ si $\lambda<0$

Produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}_+^*$	$l\in\mathbb{R}_+^*$	$l\in\mathbb{R}_-^*$	$l\in\mathbb{R}_-^*$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_nv_n)$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

⚠ **Attention** ⚠ Dans le cas de la forme indéterminée $0\times(\pm\infty)$ tous les cas peuvent se produire:

- $u_n=\dfrac{1}{n}$, $v_n=n$, alors $u_nv_n=1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
- $u_n=\dfrac{1}{n}$, $v_n=n^2$, alors $u_nv_n=n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- $u_n=\dfrac{1}{n^2}$, $v_n=n$, alors $u_nv_n=\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Inverse

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$l \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	0^+	0^-
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{l}$	0	$+\infty$	$-\infty$

☞ **Explication** ☜ Par $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$ (resp. $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^-$), il faut comprendre

$$\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ u_n > 0 \text{ (resp. } u_n < 0) \text{ à partir d'un certain rang} \end{cases}$$

Quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	0	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	0	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{l}{l'}$	0	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

⚠ **Attention** ⚠ Dans le cas de la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ tous les cas peuvent se produire:

- $u_n = \dfrac{1}{n}$, $v_n = \dfrac{1}{n}$, alors $\frac{u_n}{v_n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
- $u_n = \dfrac{1}{n}$, $v_n = \dfrac{1}{n^2}$, alors $\frac{u_n}{v_n} = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, $v_n = \dfrac{1}{n}$, alors $\frac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Contre-exemples similaires pour le cas $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, en prenant les inverses des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ci-dessus.

Composition d'une suite par une fonction

Théorème (Limite de $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$)

Soient :

- $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction avec I un intervalle
- a un élément de I ou une extrémité de I
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I
- l un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$

Supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
En particulier si $a \in \mathbb{R}$ et f est continue en a et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

Exercice. Calculer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes de terme général

1) $\dfrac{n^2+3n+1}{3n^2-4n+2}$
2) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
3) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
4) $\dfrac{\ln(n^2+1)-2\ln n}{\mathrm{e}^{\frac{2}{n^2}}-1}$
5) q^n si $|q|<1$ ou $q>1$

III.2 Limite par encadrement, minoration ou majoration

Théorème (Théorème des "gendarmes" ou théorème d'encadrement)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et $l \in \mathbb{R}$.

Si $\begin{cases} u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \quad \text{et} \quad w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \end{cases}$. Alors: $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Exercice.

1) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \dfrac{6n}{3n+(-1)^n 5}$.

2) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.

Corollaire

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et $l \in \mathbb{R}$.

Supposons $\begin{cases} |u_n - l| \leqslant a_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$. Alors: $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Exercice. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

Théorème (Théorème de minoration, de majoration)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1) Si $\begin{cases} u_n \leqslant v_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{cases}$. Alors: $\quad v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2) Si $\begin{cases} v_n \leqslant u_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \end{cases}$. Alors: $\quad v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exercice.

1) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \mathrm{e}^n(-2+\sin n)$.

2) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^2+k}$.

III.3 Suites monotones

Théorème (Théorème de la limite monotone)

1) Toute suite réelle **croissante**, **majorée** converge (vers sa borne supérieure).

2) Toute suite réelle **croissante**, **non majorée** tend vers $+\infty$.

3) Toute suite réelle **décroissante**, **minorée** converge (vers sa borne inférieure).

4) Toute suite réelle **décroissante**, **non minorée** tend vers $-\infty$.

☞ **Explication** ☜

- Ce théorème est un un **théorème d'existence**. Il fournit, sous certaines conditions sur la suite, l'existence d'une limite. Bien sûr, il ne fournit pas la limite.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante (resp. décroissante), on a donc l'**alternative** suivante:

  (i) **ou bien** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (resp. minorée) auquel cas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

  (ii) **ou bien** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée (resp. minorée) auquel cas $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $(-\infty)$).

Exercice.

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Puis prouver que la limite appartient à $[\frac{1}{2}, 1]$.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$. Montrer alors que la suite diverge de limite $+\infty$.

3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$. Déterminer la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⚠ **Attention** ⚠ Une erreur fréquente à éviter. Le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par M, n'implique pas que M est la limite. Car M est un majorant comme un tas d'autres $M+1$,...La limite est le plus petit de tous ces majorants.

III.4 Suites adjacentes

Définition (Suites adjacentes)

Soient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que ces suites sont adjacentes si:

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires (l'une est croissante l'autre est décroissante)
- $u_n - v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème (Convergence des suites adjacentes)

Deux suites adjacentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et ont même limite.
De plus si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, en notant $l \in \mathbb{R}$ la limite commune, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant l \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n.$$

Exercice. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les deux suites de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \cdot n!}$. Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite. *On montrera plus tard que cette limite est* $\mathrm{e} - 1$.

Exemple Un exemple vu dans le chapitre "Nombres réels".
Soit $x \in \mathbb{R}$. Les suites d'approximation décimales $\left(\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (par défaut) et $\left(\dfrac{\lfloor 10^n x + 1 \rfloor}{10^n}\right)$ (par excès) sont des suites adjacentes. Elles convergent vers x.

III.5 Suites extraites

Théorème (Limite de suites extraites)

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $l \in \mathbb{R}$ ou $-\infty$ et $+\infty$.
Alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite l.

☞ **Explication** ☜ Ce résultat est intuitivement évident. Par exemple, dans le cas d'une limite finie l, fixons $\varepsilon > 0$. Alors à partir d'un certain rang, $u_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$, nécessairement $u_{\varphi(n)} \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ à partir du même rang car $\varphi(n) \geqslant n$.

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Prouver qu'une suite n'admet pas de limite)**

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite, on détermine deux suites extraites $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ qui admettent des limites distinctes.
Souvent, on montre que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent deux limites distinctes.

Exercice.

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = q^n$ où $q \leqslant -1$ n'admet pas de limite.

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = n(1 + (-1)^n)$ n'admet pas de limite.

⚠ **Attention** ⚠ Évidemment, une suite extraite peut converger sans que la suite ne converge ($u_n = (-1)^n$). Cela dit on a le résultat suivant...

Théorème (Limites des suites d'indices pairs et impairs)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$ ou $-\infty$ ou $+\infty$. Alors:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \\ u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \end{cases}.$$

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que: $\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2;\ 0 \leqslant u_{m+n} \leqslant \dfrac{m+n}{mn}$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

Pour résumer voici les différentes méthodes qui s'offrent à vous.

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Prouver l'existence de limite ou non, la déterminer éventuellement)**

- Utiliser les opérations sur les limites.
- Utiliser le théorème des gendarmes, ou le théorème de minoration ou le théorème de majoration.
- Utiliser le corollaire du théorème des gendarmes $|u_n - l| \leqslant \alpha_n$ avec $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Utiliser le théorème de la limite monotone.
- Utiliser le théorème sur les suites adjacentes.
- Utiliser des suites extraites pour prouver la divergence sans limite.
- Utiliser les suites extraites d'indice pair/impair.

IV Comparaison des suites

IV.1 Négligeabilité - Domination

Définition (Négligeabilité - Domination)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable devant** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  On note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$, on dit que "$u_n$ est un petit o de v_n".
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **dominée devant** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée bornée.
  On note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$, on dit que "$u_n$ est un grand O de v_n".

Exemples

1) $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n^4)$ car $\dfrac{n^2}{n^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

2) $\dfrac{1}{n^4} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ car $\dfrac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

3) $\dfrac{n^2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(n)$ car $\left|\dfrac{n^2}{n(n+1)}\right| \leqslant \dfrac{n^2}{n^2} \leqslant 1$.

Remarques (Quelques propriétés)

- “Un petit o est un grand O” : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n) \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$.
- $u_n = \mathrm{o}(1)$ signifie que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- $u_n = \mathrm{O}(1)$ signifie que (u_n) est bornée.

Théorème (Opérations sur les o)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles et λ, α des réels.

1) $\boxed{\text{Si } \lambda \neq 0}$, $\qquad u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n) \Rightarrow \begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\lambda v_n) \\ \lambda u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n) \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n) \\ u'_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n) \end{cases} \Rightarrow u_n + u'_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$

3) $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n) \\ u'_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v'_n) \end{cases} \Rightarrow u_n u'_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n v'_n)$

4) $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n) \Rightarrow u_n w_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n w_n)$

5) $\boxed{\text{Si } \alpha > 0}$, $\qquad \begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} > 0 \quad \text{et} \quad (v_n)_{n\in\mathbb{N}} > 0 \\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n) \end{cases} \qquad \Rightarrow u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n^\alpha)$

6) $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n) \\ v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(w_n) \end{cases} \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(w_n)$, (la relation o est transitive)

⚠ **Attention** ⚠ Certaines opérations sont illicites avec les o.

- **La somme**: si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ et $u'_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v'_n)$, alors on n'a pas nécessairement $u_n + u'_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n + v'_n)$.
  Par exemple $n - 1 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(n^2\right)$ et $1 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(1 - n^2\right)$ pourtant $n \underset{n\to+\infty}{\neq} \mathrm{o}(1)$.
- **La composition**: si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$, alors on n'a pas nécessairement $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(f(v_n))$.
  Par exemple avec $n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(n^2\right)$ et $f(x) = \dfrac{1}{x}$, alors $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\neq} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Remarques (Opération sur les O)

On a pour “grand O” les mêmes propriétés que petit o (remplacer o par O).

Théorème (Comparaisons des suites de référence)

Soient α, β, a, b des réels.

1) Si $\alpha < \beta$ alors $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(n^\beta\right)$.
2) Si $0 < a < b$ alors $a^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(b^n)$.
3) Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors $(\ln n)^\beta \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n^\alpha)$.
4) Si $\alpha > 0$ et $a > 1$ alors $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(a^n)$.
5) Si $a > 1$, $a^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n!)$.

☞ **Explication** ☜ Par ordre de négligeabilité : $(\ln n)^\beta \ll n^\alpha \ll a^n \ll n!$.

IV.2 Équivalence

Définition (Équivalence)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles où l'on suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas a.p.c.r..

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **équivalentes** noté $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ si : $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Cela revient à dire : $u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$ **c'est-à-dire** $u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$.

Exemples

- $2n^2 - n + 3 \underset{+\infty}{\sim} 2n^2$ car $\dfrac{2n^2-n+3}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ ou $2n^2 - n + 3 = 2n^3 + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(n^2)$
- $n + \ln n + 1 \underset{+\infty}{\sim} n$ ou $n + \ln n + 1 = n + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(n)$.
- $\dfrac{3}{n} - \dfrac{2}{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3}{n}$ car $\dfrac{\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{\frac{3}{n}} = \dfrac{3-\frac{2}{n}}{3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Remarques

- La relation $\sim$ est symétrique : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$.
- ⚠ **Attention** ⚠ **Il est faux d'écrire** $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ni même $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$ qui sont fausses. En effet,

  – $n \underset{+\infty}{\sim} n+1$ alors que $(n+1)-n = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

  – $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors que $\dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{\not\sim} \dfrac{1}{n^2}$.
- ⚠ **Attention** ⚠ **Il est incorrect d'écrire** $u_n \underset{+\infty}{\sim} 0$
- **Un équivalent permet d'obtenir le signe de la suite à partir d'un certain rang**
  Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

Théorème (Opérations sur les équivalents)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) **La relation $\sim$ est transitive** : $\begin{cases} u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n \end{cases} \Rightarrow u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$, (la relation $\sim$ est transitive)

2) **On peut faire le produit d'équivalents** : $\begin{cases} u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{+\infty}{\sim} v'_n \end{cases} \Rightarrow u_n u'_n \underset{+\infty}{\sim} v_n v'_n$

3) **On peut faire le quotient d'équivalents** : $\begin{cases} (u'_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v'_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ non nuls apcr} \\ u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{+\infty}{\sim} v'_n \end{cases} \Rightarrow \dfrac{u_n}{u'_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{v'_n}$

4) **On peut prendre la puissance d'équivalents** : $\begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} > 0 \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} > 0 \\ u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \end{cases} \Rightarrow u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} v_n^\alpha$

5) **On ne peut pas faire la somme mais....** : $\begin{cases} u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n \\ v_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(w_n) \end{cases} \Rightarrow u_n + v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$

⚠ **Attention** ⚠ Certaines opérations sont illicites avec les équivalents.

- **La somme**: si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $u'_n \underset{+\infty}{\sim} v'_n$, alors on n'a pas nécessairement $u_n + u'_n \underset{+\infty}{\sim} v_n + v'_n$.
  Par exemple $n^2 - 1 \underset{+\infty}{\sim} n^2$ et $-n^2 \underset{+\infty}{\sim} 1 - n^2$ pourtant $-1 \underset{+\infty}{\not\sim} 1$.
- **La composition**: si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors on n'a pas nécessairement $f(u_n) \underset{+\infty}{\sim} f(v_n)$.
  Par exemple avec $n \underset{+\infty}{\sim} n + \ln n$ et $f(x) = \mathrm{e}^x$, alors $\mathrm{e}^n \underset{+\infty}{\not\sim} n\,\mathrm{e}^n$.

Exercice. Déterminer un équivalent simple de u_n dans les cas suivants:

1) $u_n = \dfrac{3n^3 + 5n^2 - 4n + 1}{2n^2 - 5n + 7}$

2) $u_n = \ln(n+3)$

3) $u_n = \ln(n^2 + 3n + 1)$

4) $u_n = \sqrt{3n^2 - 4}$

5) $u_n = \dfrac{3^n + n!}{n^2 + 1}$

6) $u_n = \dfrac{\ln n + n!}{\mathrm{e}^n + (n+1)!}$

☞ **Explication** ☜ Un équivalent simple est un produit, quotient, ou puissance de suite de référence.

Théorème (Lien entre limites et équivalents)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\boxed{l \neq 0}$. Alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} l$.

2) Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on a l'alternative suivante:
   - **ou bien** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont toutes les deux une limite (finie ou infinie) et elles sont égales
   - **ou bien** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont pas de limite.

Exercice. Déterminer la limite de u_n dans les cas suivants:

1) $u_n = \dfrac{2n^3 + 3n^2 + 7}{3n^2 - 5n + 2}$

2) $u_n = \dfrac{\ln n + n^2}{n^3 + 1}$

3) $u_n = \dfrac{\sqrt{3n^2 - 4}}{2^n + 1}$

Théorème (Équivalents usuels)

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle qui **converge vers** 0. Alors:

$\sin u_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$ $\quad$ $\mathrm{sh}\, u_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$ $\quad$ $\tan u_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$ $\quad$ $\mathrm{th}\, u_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$ $\quad$ $\mathrm{Arcsin}\, u_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$

$\mathrm{Arctan}\, u_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$ $\quad$ $\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$ $\quad$ $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{+\infty}{\sim} \alpha u_n$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n$

$$\cos u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2} \qquad \mathrm{ch}\, u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}.$$

Exercice. Déterminer un équivalent simple de u_n dans les cas suivants :

1) $u_n = n^2(\mathrm{e}^{\frac{2}{n}} - 1)$

2) $u_n = \sqrt{\dfrac{1}{n} + 4} - 2$

3) $u_n = \dfrac{\ln\left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)}{\cos\frac{2}{n} - 1}$

4) $u_n = \mathrm{e}^{1 + \mathrm{sh}\,\frac{3}{n}} - \mathrm{e}$

5) $u_n = \sqrt{\ln(n+2) - \ln n}$

Exercice. Déterminer la limite de u_n dans les cas suivants :

1) $u_n = \dfrac{\ln\left(1 + \sin\frac{1}{n^2}\right)}{\cos\frac{2}{n} - 1}$

2) $u_n = n^2 \ln(\cos(\dfrac{1}{n}))$

3) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$

4) $u_n = \left(\cos\left(\dfrac{2}{n}\right)\right)^{n^2}$

Méthode pratique (Remarques utiles pour le calcul de limites à l'aide d'équivalents)

On cherche à calculer la limite de u_n.

1) On cherche un équivalent v_n de u_n. La limite de u_n est celle de v_n.

2) On peut utiliser les équivalents au cours du calcul sans chercher à obtenir un équivalent de u_n. C'est le cas lorsque $u_n = \mathrm{e}^{\alpha_n}$. On détermine un équivalent de α_n, puis la limite de α_n. Enfin, **on compose la limite (et pas l'équivalent) par l'exponentielle** pour obtenir la limite de u_n (cf. exemple 3) et 4) ci-dessus).

3) Si u_n est de la forme $a_n^{b_n}$ on écrit : $u_n = \mathrm{e}^{b_n \ln(a_n)}$.

Méthode pratique (Déterminer l'équivalent d'une somme)

On souhaite déterminer un équivalent de $u_n + v_n$.

- On détermine un équivalent de u_n et v_n : $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$.
- Puis, trois cas de figure.
  - Si l'un des équivalents est négligeable devant l'autre par exemple $a_n = \mathrm{o}(b_n)$ alors $u_n + v_n \sim b_n$.
  - Si a_n et b_n sont proportionnels, $a_n = \lambda b_n$ et $a_n + b_n \neq 0$ alors on réécrit les équivalents sous forme :
  $$u_n = a_n + \mathrm{o}(a_n) \qquad \text{et} \qquad v_n = b_n + \mathrm{o}(b_n).$$
  Donc, $u_n + v_n = (1+\lambda)a_n + \mathrm{o}a_n$ donc $u_n + v_n \sim (1+\lambda)a_n$
  - Si $a_n + b_n = 0$ alors on réécrit autrement $u_n + v_n$.

Exercice. Déterminer un équivalent simple de u_n dans les cas suivants :

1) $u_n = \sin \dfrac{1}{n} + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{n^2}$

2) $u_n = \mathrm{e}^{\sin \frac{1}{n}} - \cos \dfrac{2}{n}$

3) $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right) + \operatorname{Arcsin} \dfrac{1}{n}$

4) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

5) $u_n = \sqrt{3n+1} - \sqrt{n-1}$

6) $u_n = \ln(n^2 + 3^n)$

7) $u_n = \ln(\sin \dfrac{1}{n})$

Théorème (Théorème des "gendarmes" : versions équivalents)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles.

Si $\begin{cases} u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ u_n \sim a_n \quad \text{et} \quad w_n \sim a_n \end{cases}$. Alors: $\quad v_n \sim a_n$.

Exercice. Soit u une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^{\sin(\frac{1}{n})} - 1$.
Déterminer un équivalent de u_n.

V Étude de suites récurrentes

V.1 Suites récurrentes d'ordre 1

On étudie les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ où $f : I \to \mathbb{R}$ **continue sur** I où I est un intervalle.

Exemples de représentation graphique : sur les exemples suivants :

$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \\ u_0 = 0, u_0 = 5 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(1-u_n^2) \\ u_0 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} u_{n+1} = 1 - u_n^2 \\ u_0 = 0, u_0 = 1, u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$

Remarques (Trois résultats à retenir)

- **Existence de la suite :** pour pouvoir calculer, $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1)$, $u_3 = f(u_2)$..., il est nécessaire que pour chaque n, $u_n \in I$ afin que $f(u_n)$ existe bien.
  Par exemple, si on considère $\begin{cases} u_{n+1} = 1 + \sqrt{1-u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$ avec $f(x) = 1 + \sqrt{1-x}$ où f définie sur $]-\infty, 1]$. Alors $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, u_2 n'est pas définie car $u_1 \notin]-\infty, 1]$ Une condition suffisante pour que la suite existe bien est que $\boxed{u_0 \in I \text{ et } f(I) \subset I}$. Lorsque $f(I) \subset I$, on dit que **l'intervalle I est stable par f**. On montre par récurrence que :

  $$\boxed{\textbf{si } I \textbf{ est stable par } f \quad \textbf{ET} \quad u_0 \in I \quad \textbf{alors} \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I}.$$

- **Limites éventuelles :** Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ alors $l = f(l)$ *(en passant à la limite la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et en utilisant la continuité de f en l).*
  Un tel réel l est appelé un point fixe de f. Graphiquement, l est l'abscisse d'un point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la première bissectrice des axes.

  $$\boxed{\textbf{Les limites éventuelles de } f \textbf{ sont donc parmi les points fixes de } f}.$$

  Conséquence, si f n'admet pas de point fixe alors la suite diverge : pas de limite, limite $+\infty$ ou limite $-\infty$.

- **Monotonie :** supposons f est croissante alors comme pour tout $n \in \mathbb{N}$,

  $$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1}) \quad \text{il découle} \quad \operatorname{sgn}(u_{n+1} - u_n) = \operatorname{sgn}(f(u_n) - f(u_{n-1})) = \operatorname{sgn}(u_n - u_{n-1}).$$

  Donc $u_{n+1} - u_n$ garde un signe constant et donc u est monotone.

  $$\boxed{\textbf{Si } f \textbf{ est croissante alors } u \textbf{ est monotone}}.$$

✎ Méthode pratique ✎ (Nature d'une suite définie par une relation de récurrence d'ordre 1)

On souhaite étudier la nature de la suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

- ▶ *Préliminaire : un dessin rapide permet de conjecturer l'évolution des termes de la suite (monotonie, limite). Puis en fonction du contexte, on peut être amené aux étapes suivantes.*
- ▶ On montre que la suite est bien définie. A cette occasion on peut mettre en évidence des intervalles stables en étudiant les variations de f.
- ▶ On résout $f(x) - x = 0$ pour déterminer les limites éventuelles. On étudie le signe de $f(x) - x$ pour étudier la monotonie ou directement celui de $u_{n+1} - u_n$.
- ▶ On utilise théorème de la limite monotone :
  - pour montrer la convergence on mettra en évidence que la suite est croissante-majorée ou décroissante minorée
  - pour montrer la divergence vers $+\infty$, on montrera que la suite est croissante puis que la limite est $+\infty$ en montrant selon les cas qu'il n'y a pas de point fixe ou par l'absurde que la limite n'est pas finie. On ne montre pas que la suite n'est pas majorée, en général difficile à faire.

Exercices. Déterminer la nature de la suite définie par

1) $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1} \\ u_0 = 1 \end{cases}$. 2) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$. 3) $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right) \\ u_0 > 0 \end{cases}$ .4) $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{6}(u_n^2+8) \\ u_0 > 0 \end{cases}$.

V.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On étudie les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \qquad \text{où } a, b \in \mathbb{K}.$$

On appelle équation caractéristique associée à cette suite l'équation $r^2 - ar - b = 0$ $(*)$ de discriminant $\Delta = a^2 + 4b$.

Théorème (Terme général d'une suite à double récurrence linéaire: cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme ci-dessus.

- Si $\Delta > 0$, $(*)$ a deux solutions réelles distinctes r_1, r_2 alors il existe deux constantes réelles λ et μ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
- Si $\Delta = 0$, $(*)$ a une solution double r, alors alors il existe deux constantes réelles λ et μ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = (\lambda n + \mu) r^n.$$
- Si $\Delta < 0$, $(*)$ a deux solution complexes conjuguées $r = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et $\overline{r}$, alors il existe deux constantes réelles λ et μ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \rho^n \left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\right).$$

Remarques

- Remarquer l'analogie avec les équations différentielles.
- Si on considère des suites à valeurs complexes (voir partie d'après) alors avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Ne restent que les cas:
  - $*$ $\Delta \neq 0$: alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$, où $(\lambda,\, \mu) \in \mathbb{C}^2$
  - $*$ $\Delta = 0$: alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda n + \mu) r^n$, où $(\lambda,\, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
- On peut déterminer les constantes λ et μ à l'aide des premiers termes u_0, u_1.

Exercice. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants:

1) $\begin{cases} u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \\ u_0 = 1 \quad u_1 = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u_{n+2} = \sqrt{2} u_{n+1} - u_n \\ u_0 = 1 \quad u_1 = 2 \end{cases}$

VI Suites complexes

VI.1 Définitions

Définition (Suites complexes)

- Une **suite complexe** est une application $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$.
- L'ensemble des suites complexes est noté $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe, on définit:
  (i) les parties réelle et imaginaire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (ce sont des suites réelles)
  (ii) la conjugaison de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $(\overline{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$
  (iii) le module de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

Exemple

1) La suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $q \in \mathbb{C}$ est une suite complexe.
2) La suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \mathrm{i}\, u_n + 3\,\mathrm{i} + 1 \\ u_0 = 1 - \mathrm{i} \end{cases}$ est une suite complexe. Le terme général s'obtient par la même méthode que dans le cas réel (point fixe, suite auxiliaire géométrique...)

Remarques

- **Ce qui est encore valable**: l'extraction de suites, suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique.
- **Ce qui n'est plus valable**: les notions de majoration et minoration car pas d'ordre; les notions de croissance/décroissance/monotonie car on n'a pas défini d'ordre sur $\mathbb{C}$

VI.2 Limite d'une suite complexe

Définition (Limite d'une suite complexe)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite l si la suite réelle $(|u_n - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **convergente** si elle tend vers une **limite finie** ($\in \mathbb{C}$). Sinon, elle est dite **divergente**.

⚠ **Attention** ⚠ On ne définit pas de limite égale à ∞ pour les suites complexes.

Théorème (Lien entre limite d'une suite et limite de ses parties réelle et imaginaire)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$. Alors: $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{Re}(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(l) \\ \mathrm{Im}(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(l) \end{cases}$.

Dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)$, $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)$.

NB : on peut donc échanger les symboles lim et Re/Im.

Remarques

- **Ce qui est encore valable**: l'unicité de la limite, toute suite convergente est bornée, les opérations sur les limites, théorèmes de convergence des suites extraites, corollaire du théorème des gendarmes (avec module au lieu de valeur absolue), théorème de Bolzano-Weierstrass
- **Ce qui n'est plus valable**: passage à la limite d'une inégalité, théorème des gendarmes, théorème de la limite monotone (car on n'a pas défini d'ordre sur $\mathbb{C}$).

Théorème (Limite de q^n)

Soit $q \in \mathbb{C}$. La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement $|q| < 1$ ou $q = 1$. Plus précisément :

$$q^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } |q| < 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \end{cases} \qquad (q^n) \text{ n'admet pas de limite sinon.}$$

Remarques (Cas $|q = 1|$)

Dans ce cas $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

- Si $\theta = \dfrac{a}{b}\pi$, où $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ alors la suite $\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,na}{b}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période $2b$
- Si $\theta \notin \pi\mathbb{Q}$ alors la suite $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans l'ensemble $\mathbb{U}$.