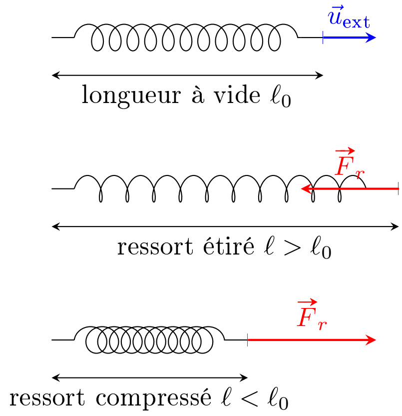
I Oscillateur harmonique

1 Force de rappel d'un ressort

Un ressort exerce sur chacune de ses extrémités une force :

$$\boxed{\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{\text{ext}}}$$

- k est la constante de raideur du ressort,
- ℓ est la longueur du ressort,
- ℓ_0 est la longueur à vide du ressort,
- $\vec{u}_{\text{ext}}$ est le vecteur unitaire dans la direction du ressort, orienté vers l'extérieur du ressort.



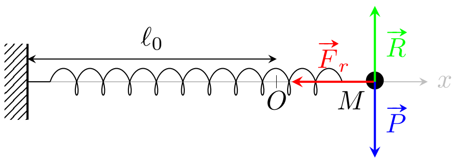
2 Système masse-ressort

On considère une masse m accrochée à un ressort, pouvant se déplacer sans frottements selon un axe Ox horizontal. L'origine O est choisie comme la position d'équilibre de la masse. La masse est repérée par sa coordonnée x : $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x$, $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$ et $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$.
La masse est soumise à :

— la force de rappel du ressort $\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x$

— son poids $\vec{P} \perp \vec{u}_x$

— la réaction du support, $\vec{R} \perp \vec{u}_x$ en l'absence de frottements.



La principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m\vec{a} = \vec{F}_r + \vec{P} + \vec{R}$, soit selon $\vec{u}_x$, $m\ddot{x} = -kx$, d'où l'équation du mouvement $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$.

La forme canonique de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique est : $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

On identifie $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la **pulsation propre** du système.

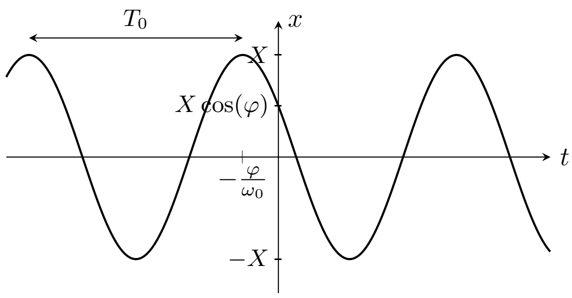
Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

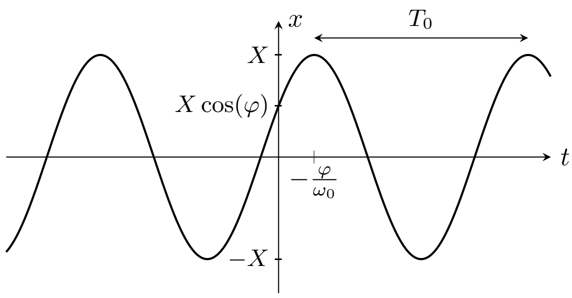
On détermine les constantes (A, B), ou (X, φ), en utilisant les conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$.

3 Allure des solutions

On considère une solution de la forme $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi)$ où $X > 0$ et $\varphi \in]-\pi, \pi]$.
X est appelé amplitude et φ phase à l'origine.



$\varphi \in]0, \pi[$

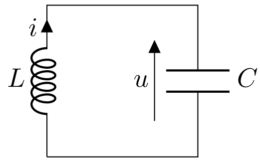


$\varphi \in]-\pi, 0[$

La période T_0 des oscillations est telle que, la phase $\omega_0 t + \varphi$ varie de 2π, lorsque t varie de T_0, d'où $\omega_0 T_0 = 2\pi$, soit $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}}$

La fréquence propre du système est $\boxed{f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}}$

4 Circuit LC



On a $u = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ (convention générateur) et $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ (convention récepteur), donc $u = -LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$, soit $\ddot{u}+\frac{1}{LC}u = 0$.
On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

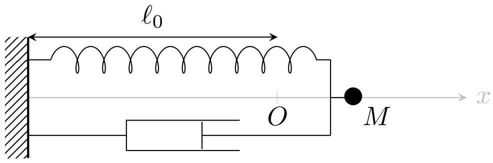
Bilan énergétique :

On multiplie la loi des mailles par i : $ui + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i = 0$, or $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, donc : $uC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i = 0$
En prenant une primitive, on obtient : $\frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \text{cste}$.
Ainsi, l'énergie totale du circuit se conserve. L'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur est périodiquement convertie en énergie magnétique emmagasinée dans la bobine, et inversement.

II Oscillateur harmonique amorti

1 Système masse-ressort amorti par frottement fluide

On reprend le système masse-ressort, mais la masse est maintenant soumise à une force de frottement fluide de la forme : $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{u}_x$.



La principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m\vec{a} = \vec{F}_r + \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}$, soit selon $\vec{u}_x$, $m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$, d'où l'équation du mouvement $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$.
La forme canonique de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti est :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

On identifie $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la **pulsation propre** et $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{mk}}{\alpha}$ le **facteur de qualité**, sans dimension.

2 Résolution de l'équation différentielle

On résout l'équation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$
Le discriminant s'écrit : $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q} - 2\right)\left(\frac{1}{Q} + 2\right)$
Δ est du signe de $\frac{1}{Q} - 2$.

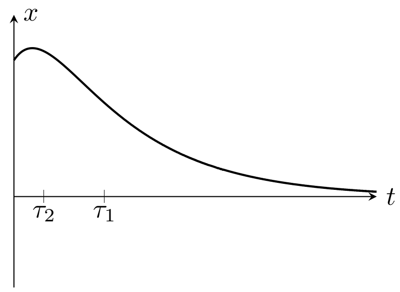
Cas apériodique : $\Delta > 0$, soit $Q < \frac{1}{2}$

Les solutions de l'équation caractéristique sont : $r_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}\right) = -\underbrace{\frac{\omega_0}{2Q}}_{\lambda} \pm \underbrace{\omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}}_{\Omega}$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme :

$$\boxed{x(t) = \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t} = e^{-\lambda t}\left[A\mathrm{ch}(\Omega t) + B\mathrm{sh}(\Omega t)\right]}$$

Comme $\Omega < \lambda$, $r_{\frac{1}{2}} < 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$. On pose $\tau_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{r_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\lambda \mp \Omega}$, le temps caractéristique de $e^{r_{\frac{1}{2}}t}$.



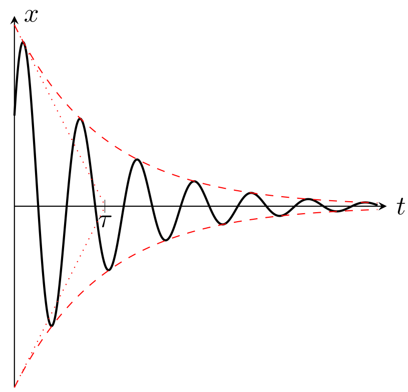
La durée du régime transitoire est contrôlée par la plus lente des 2 exponentielles $e^{r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$. Ainsi, la durée du régime transitoire est de l'ordre de $3\tau_1 = \frac{3}{\lambda - \Omega}$.

Cas pseudo-périodique : $\Delta < 0$, soit $Q > \frac{1}{2}$

Les solutions de l'équation caractéristique sont : $r_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{Q} \pm i\sqrt{-\Delta}\right) = -\underbrace{\frac{\omega_0}{2Q}}_{\frac{1}{\tau}} \pm i \underbrace{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}_{\omega_1}$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme :

$$\boxed{x(t) = e^{-t/\tau}\left[A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)\right]} = e^{-t/\tau} X \cos(\omega_1 t + \varphi)$$



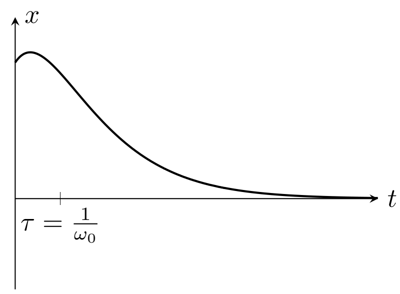
La pseudo-période des pseudo-oscillations est $\boxed{T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}}$. $\omega_1 < \omega_0$, donc $T_1 > T_0$.

La durée du régime transitoire est contrôlée par l'enveloppe exponentielle $\pm X e^{-t/\tau}$. Ainsi, la durée du régime transitoire est de l'ordre de $3\tau = \frac{6Q}{\omega_0}$.
Le nombre de pseudo-oscillations visibles est de l'ordre de $\frac{3\tau}{T_1} = \frac{6}{2\pi}\frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \underset{Q \gg 1}{\approx} Q$.

Cas critique : $\Delta = 0$, soit $Q = \frac{1}{2}$

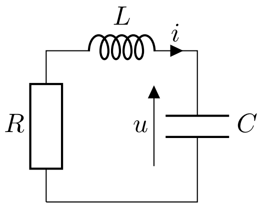
L'équation caractéristique admet une unique solution : $r = -\omega_0$
Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme :

$$\boxed{x(t) = e^{-\omega_0 t}(At + B)}$$



La durée du régime transitoire est contrôlée par l'exponentielle $e^{-\omega_0 t}$, donc la durée du régime transitoire est de l'ordre de $3\tau = \frac{3}{\omega_0}$.
Le cas critique correspond au régime transitoire le plus court.

3 Circuit RLC série



La loi des mailles s'écrit : $u + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0$. De plus, $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, donc $u + LC\ddot{u} + RC\dot{u} = 0$, soit

$$\ddot{u} + \frac{R}{L}\dot{u} + \frac{1}{LC}u = 0$$

On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti. On identifie

$$\begin{cases} \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \\ \frac{\omega_0}{Q} &= \frac{R}{L} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q &= \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$$

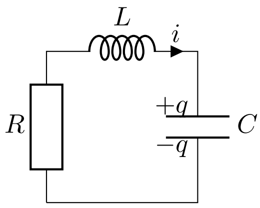
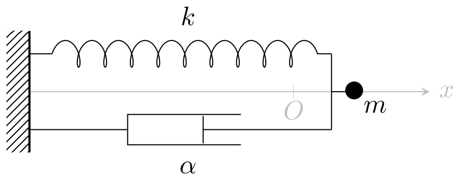
Bilan énergétique :

On multiplie la loi des mailles par i : $ui + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i + Ri^2 = 0$,
or $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, donc $uC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i + Ri^2 = 0$, soit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2\right) = -Ri^2$$

Ainsi, l'énergie totale du circuit, échangée périodiquement entre le condensateur et la bobine, est progressivement dissipée par effet Joule.

4 Analogie électromécanique

Circuit RLC série	Système masse-ressort amorti
	
Loi des mailles :	Principe fondamental de la dynamique :
$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} + Ri = 0$	$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -kx - \alpha v_x$
Charge q	Position x
Intensité $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$	Vitesse $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$
Tension	Force
Inductance L	Masse m
Inverse de la capacité $\frac{1}{C}$	Raideur k
Résistance R	Coefficient de frottement α
Énergie magnétique : $E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}Li^2$	Énergie cinétique : $E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv_x^2$
Énergie électrostatique : $E_\mathrm{e} = \frac{q^2}{2C}$	Énergie potentielle élastique : $E_\mathrm{pe} = \frac{1}{2}kx^2$