Étude de convergence

Exercice 1. (♡) Déterminer, si elle existe la limite des suites suivantes,

1) -a- $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

-b- $u_n = \sqrt{n+\sin n} - \sqrt{n}$

2) -a- $u_n = n\cos\dfrac{1}{n}$

-b- $u_n = \dfrac{1}{n}\cos n$

-c- $u_n = \dfrac{n^2+\sin(n)}{3n^2+(-1)^n}$

-d- $u_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ où $x \in \mathbb{R}$

3) -a- $u_n = \dfrac{n(-1)^n+1}{3n+2}$

-b- $u_n = \cos\left(\left(n+\dfrac{1}{n}\right)\pi\right)$

4) -a- $u_n = (\ln n)^{\frac{1}{n}}$

-b- $u_n = n^{\frac{\sin n}{n}}$

Exercice 2. (∗∗) En utilisant $\cos(n+2)+\cos n$ et $\cos(2n)$ montrer que la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Exercice 3. (♡) Montrer que les suites suivantes admettent une limite et calculer la limite:

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ 2) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ 3) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k}}}$

Exercice 4. (∗) Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que les suites (u_{2n}), (u_{3n}), (u_{2n+1}) convergent. Montrer que la suite (u_n) converge.

Étude qualitative de suites

Exercice 5. (∗∗) Soit u une suite réelle monotone. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_1+\cdots+u_n}{n}$. Montrer que v est monotone.

Exercice 6. (∗) Soient u et v deux réelles.

1) Montrer que si u converge et v diverge alors $u+v$ diverge.
2) Si u et v divergent, a-t-on $u+v$ diverge?
3) Montrer que si $u+v$ et $u-v$ convergent alors u et v converge.

Suites monotones

Exercice 7. (♡) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)}$.
   Prouver alors que u est majorée.
2) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 8. (♡) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}.$$

1) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}.$

2) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

3) Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$

Exercice 9. $(*)$

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$

1) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des suites adjacentes.

2) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note L sa limite.

3) Proposer un algorithme Python, qui permet d'obtenir une valeur approchée de L à 10^{-2} près.

Exercice 10. $(*)$Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en posant:

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

1) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \leqslant a_n$.

3) Établir que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites monotones à partir du rang 1 puis des suites convergentes de même limite l. On ne cherchera pas à calculer leur limite commune, qu'on appelle moyenne arithmético-géométrique de a et b.

Suites récurrentes

Exercice 11. $(\heartsuit)$ Déterminer le terme général en fonction de n des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants:

1) $u_0 = 3$ et: $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -2u_n + 5$

2) $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et: $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2$

3) $u_0 = 1$ et: $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}.$

-a- Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Indication : montrer par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: "u_n existe et $u_n > 0$".

-b- En posant $w_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$ écrire w_{n+1} en fonction de w_n. Conclure

Exercice 12. $(*)$ Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite complexe définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{1}{3}(z_n + 2\overline{z_n})$.
Exprimer z_n en fonction de n et z_0. Puis calculer la limite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de z_0.

Exercice 13. $(\heartsuit)$ Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et: $\quad \forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \,\mathrm{e}^{-u_n}$.

Exercice 14. $(\heartsuit)$ Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et: $\quad \forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

Exercice 15. $(\heartsuit)$ Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et: $\quad \forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}.$

1) Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$. Simplifier S_n et déduire que $S_n \sim u_n$.

Exercice 16. ($*$) Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et: $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$.

1) Étudier les variations de f sur $]0, +\infty[$. On dressera le tableau de variations.

2) Faire un dessin pour réprésenter les termes de la suite.

3) Montrer que les intervalles $]0, 2]$ et $[2, +\infty[$ sont stables par $f \circ f$.

4) Montrer alors que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont bien définies et respectivement à valeurs dans $]0, 2]$ et $[2, +\infty[$.

5) Etudier la monotonie des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Déterminer alors leur nature et leur limite.

6) Déduire alors la nature de la suite u.

Exercice 17. ($\heartsuit$) On souhaite calculer $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots+\sqrt{1}}}}$.
On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et: $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1) Montrer que la suite est bien définie et est positive.

2) Sous réserve de convergence, quelle est alors la seule limite possible pour (u_n). On la note l.

3) Prouver: $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ \left|\sqrt{1+x} - \sqrt{1+y}\right| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|$.

4) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - l| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - l|$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - l| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - l|$.

5) En déduire la convergence de $((u_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Exercice 18. ($*$)

1) Soit $q \in [0, 1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit (u_n) une suite réelle positive vérifiant: $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \leqslant q u_n$.

   -a- Déterminer une majoration de u_n par un majorant dépendant de u_{n_0}, q et n. *On pourra commencer par le cas où* $n_0 = 0$.

   -b- Montrer que (u_n) converge de limite nulle.

2) Soit $q > 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit (u_n) une suite réelle positive vérifiant: $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \geqslant q u_n$.
Montrer que (u_n) admet pour limite $+\infty$.

3) **Application**. A l'aide de ce qui précède, montrer que la suite (v_n) définie par: $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{2^n}{n!}$ est de limite nulle.

Exercice 19. ($**$) On définit la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.
On note $\rho = |z_0|$ et θ un argument de z_0. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on exprimera en fonction de ρ et θ.
Indication : on pourra utiliser, après l'avoir prouvé que $\sin\dfrac{\theta}{2^n}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\dfrac{\theta}{2^k} = \dfrac{1}{2^n}\sin\theta$.

Exercice 20. ($*$) Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1) Exprimer F_n en fonction de n.

2) Déterminer si elles existent les limites des suites $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 21 Déterminer le terme général des suites réelles suivantes:

1) $(\heartsuit)\begin{cases} u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n \\ u_0 = 1, \ \ u_1 = 0 \end{cases}$ 2) $(*)\begin{cases} u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^6}{u_n^9} \\ u_0 = 2, \ \ u_1 = 1 \end{cases}$ 3) $(*)\begin{cases} \dfrac{1}{u_{n+2}} = \dfrac{1}{u_{n+1}} + \dfrac{1}{u_n} \\ u_0 = 1, \ \ u_1 = 1 \end{cases}$

Suites implicites

Exercice 22. $(*)$ Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = nx + \ln(x)$. On considère l'équation:

$$(E_n) \quad nx + \ln(x) = 0.$$

1) Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, notée x_n.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le signe de $f_n(x_{n+1})$. En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite.

Équivalents

Exercice 23. $(\heartsuit)$ Tous les exercices du cours sur calculs d'équivalents et de limites grâces au équivalents (bien repérer les "méthodes pratiques").

Exercice 24. $(\heartsuit)$ En utilisant des équivalents, déterminer les limites des suites de terme général:

1) $u_n = \dfrac{3n^3 + 5n^2 - 7n + 1}{2n^3 - 4n + 1}$

2) $u_n = \dfrac{2n^2 + (\ln n)^3 - 4}{n! + n^4 - (\ln n)^6}$

3) $u_n = n \sin \dfrac{1}{n}$

4) $u_n = n\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} - 1\right)$

5) $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{3}{n}} - 1}{\ln(n+1) - \ln n}$

6) $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$

7) $u_n = (n^3+1)^{\frac{1}{3}} - n$

8) $u = n = \left(1 + \dfrac{\alpha}{n}\right)^n$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

9) $n^\alpha \sin \frac{1}{n}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

10) $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ où $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

11) $u_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

12) $(*) u_n = \left(\ln\left(\mathrm{e} + \dfrac{1}{n}\right)\right)^n$

13) $(*) u_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^{n \ln(n)}$

Exercice 25. $(\heartsuit)$ Déterminer un équivalent simple des suites de terme général:

1) $u_n = 3^n - (\ln n)^4 + n^7 - 4n^3 + 1$

2) $u_n = \dfrac{\sin \frac{1}{n}}{\tan \frac{1}{n^2}}$

3) $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$

4) $u_n = n^2 \ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$

5) $u_n = \sin \dfrac{1}{n} + \ln(1 + \dfrac{1}{n^2})$

6) $u_n = \sin \dfrac{3}{n^2} + \ln(1 + \dfrac{1}{n^2})$

7) $\dfrac{n^3 + 3n - \ln n}{n^2 + 3(\ln n)^3}(\sin \dfrac{1}{n} + \mathrm{e}^{-n})$

Exercice 26. $(**)$ Montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$ est équivalent à $n!$. Puis déterminer un équivalent de $\dfrac{1}{n!}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!\right) - 1$.

Exercice 27. $(*)$ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives.
On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou infinie) **différente de** 1 et que $u_n \sim v_n$.

1) Montrer que $\ln u_n \sim \ln v_n$.

2) Montrer que le résultat n'est plus vraie si la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut 1.