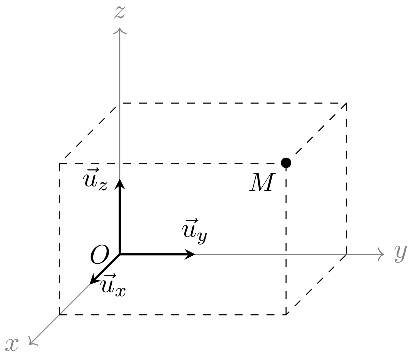
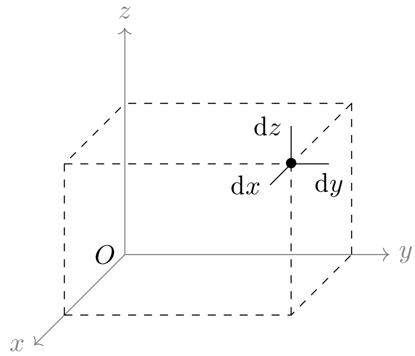
I Systèmes de coordonnées

1 Coordonnées cartésiennes (x, y, z)

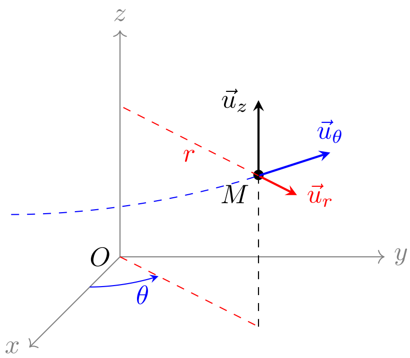


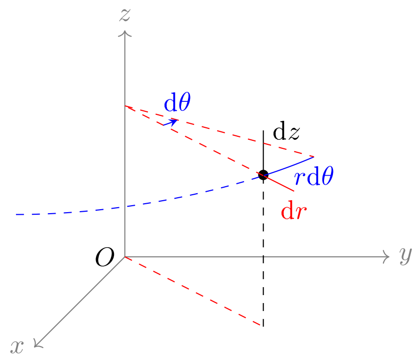


Vecteur position : $\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z}$ Vecteur déplacement élémentaire : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y + \mathrm{d}z\vec{u}_z$

Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$
Vecteur accélération : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$

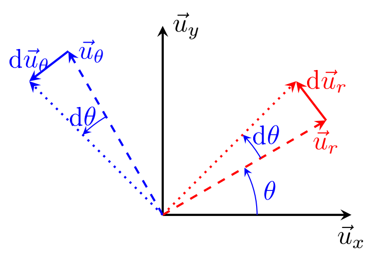
2 Coordonnées cylindriques (r, θ, z)





Vecteur position : $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z}$. Vecteur déplacement élémentaire : $\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\vec{u}_z}$

Dérivées des vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$



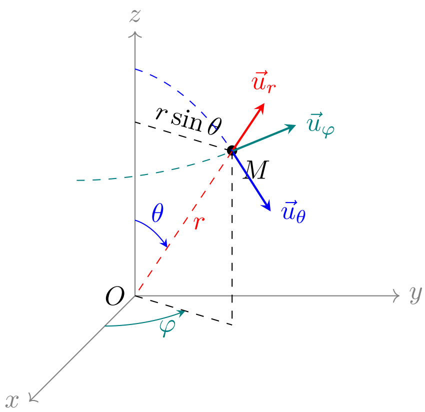
Lorsque θ varie de dθ, $\left\{\begin{array}{l} \vec{u}_r \text{ varie de } \mathrm{d}\vec{u}_r = \mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta \\ \vec{u}_\theta \text{ varie de } \mathrm{d}\vec{u}_\theta = -\mathrm{d}\theta\vec{u}_r \end{array}\right.$, d'où $\boxed{\left\{\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\vec{u}_r \end{array}\right.}$

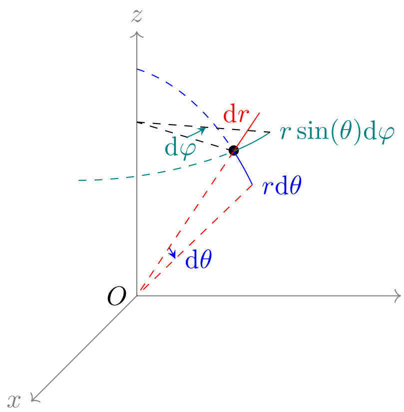
$$\text{Vecteur vitesse : } \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$$
$$= \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} + \dot{z}\vec{u}_z$$
$$= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

Vecteur accélération : $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$

$$\begin{aligned}
&= \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} + \ddot{z}\vec{u}_z \\
&= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z
\end{aligned}$$

3 Coordonnées sphériques (r, θ, φ)



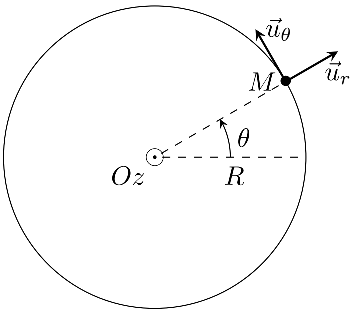


Vecteur position : $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r}$ Vecteur déplacement élémentaire : $\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\vec{u}_z}$

II Base de Frenet

1 Mouvement circulaire

On considère une trajectoire circulaire de centre O et de rayon R. Le point M est repéré par ses coordonnées cylindriques d'axe Oz, perpendiculaire au plan de la trajectoire.



$\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r$

$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{u}_r$

$v_\theta = R\dot{\theta}$ et $v = R|\dot{\theta}|$, d'où $\boxed{\vec{a} = \dot{v}_\theta\vec{u}_\theta - \dfrac{v^2}{R}\vec{u}_r}$

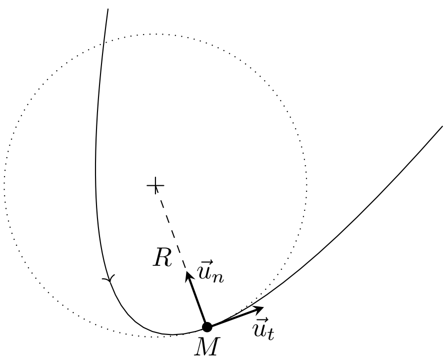
2 Généralisation à une trajectoire plane quelconque

La **base de Frenet** $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$ est une base orthonormée locale, définie en tout point M de la trajectoire.

— $\vec{u}_t$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire orienté dans le sens du mouvement

— $\vec{u}_n$ est le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}_t$ orienté vers l'intérieur de la courbure.

Dans la base de Frenet, $\boxed{\vec{v} = v\vec{u}_t}$ et $\boxed{\vec{a} = \dot{v}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n}$, où R est le **rayon de courbure** de la trajectoire au point M, c'est-à-dire le rayon du cercle osculateur, qui épouse au mieux la trajectoire au voisinage du point M.



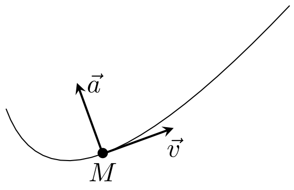
L'accélération normale $\frac{v^2}{R}\vec{u}_n$ est toujours orientée vers l'intérieur de la courbure.

L'accélération tangentielle $\dot{v}\vec{u}_t$ est :

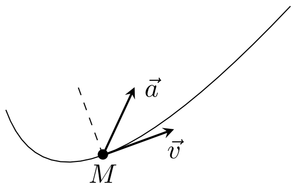
— nulle si le mouvement est uniforme

— orientée dans le sens de $\vec{v}$ si le mouvement est accéléré ($v \nearrow$ donc $\dot{v} > 0$)

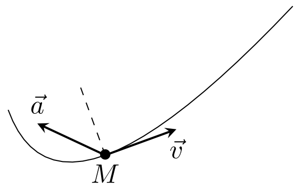
— orientée dans le sens opposé à $\vec{v}$ si le mouvement est décéléré ($v \searrow$ donc $\dot{v} < 0$)



Mouvement uniforme

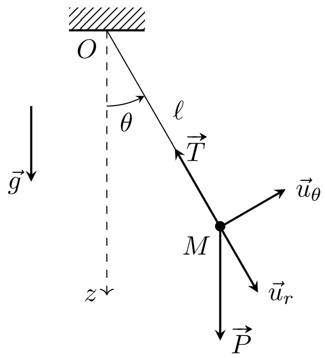


Mouvement accéléré



Mouvement décéléré

III Le pendule simple



Le point M est repéré par ses coordonnées sphériques $(\ell, \theta, 0)$: $\overrightarrow{OM} = \ell\vec{u}_r$, d'où $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = \ell\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\vec{u}_r$.

Le point matériel M est soumis à

— son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg[\cos(\theta)\vec{u}_r - \sin(\theta)\vec{u}_\theta]$

— la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{u}_r$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$, soit selon $\vec{u}_\theta$, $m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta)$.

Ainsi, l'équation du mouvement est $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0}$

Dans l'approximation des petits angles, $\sin\theta \approx \theta$, l'équation du mouvement devient : $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$.

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$.

La période des petites oscillations est donc $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$