Chapitre
Ensembles et applications.

I Les ensembles

I.1 Généralités sur les ensembles

Un ensemble est une collection d'objets. Un objet x de E est appelé un élément de E : on note $x \in E$.

Définition (Inclusion-Égalité-Partie)

Soient E et F deux ensembles.

- **Égalité.** E et F sont **égaux** si : $\forall x, \quad x \in E \Leftrightarrow x \in F$
- **Inclusion.** E est **inclus** dans F ou E est une **partie** de F si :
  $$\forall x, \quad x \in E \Rightarrow x \in F \text{ ou encore } \forall x \in E,\ x \in F.$$
  Conséquence : on caractérise l'égalité de deux ensembles par la double inclusion
  $$E = F \Longleftrightarrow E \subset F \text{ et } F \subset E.$$
- **Parties de E.** On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E c'est-à-dire l'ensemble des ensembles $A \subset E$.

⚠ **Attention** ⚠ Il ne faut pas confondre les symboles $\in$ et $\subset$. En le disant, on ne confondra donc pas non plus "appartient" et "est inclus dans".
On écrit $1 \in \mathbb{Z}$ et non pas $1 \subset \mathbb{Z}$, à défaut on peut écrire $\{1\} \subset \mathbb{Z}$. On écrit $\mathbb{N} \subset Z$ et non pas $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$.

I.2 Opérations sur les ensembles

Définition (Opérations)

Soient A et B deux ensembles.

- On appelle **réunion** de A et B l'ensemble : $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- On appelle **intersection** de A et B l'ensemble : $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ et } x \in B\}$
- On appelle **différence** de A et B l'ensemble : $A \setminus B = \{x \,/\, x \in A \text{ et } x \notin B\}$
- Si E est un ensemble et A une partie de E, on appelle **complémentaire** de A l'ensemble $E \setminus A$, noté aussi A^c s'il n'y a pas d'ambiguité sur l'ensemble E.

Remarques (Réunion et intesection quelconque)

Si I est un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On définit:

- $\bigcup_{i\in \mathrm{i}} A_i = \{x \in E \,/\, \exists i \in I,\ x \in A_i\}$: l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'un des A_i
- $\bigcap_{i\in \mathrm{i}} A_i = \{x \in E \,/\, \forall i \in I,\ x \in A_i\}$: l'ensemble des éléments qui appartiennent à tous les A_i.

Par exemple $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$.

Définition (Recouvrement disjoint, partition)

Si I est un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

- **Recouvrement disjoint.** On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement disjoint de E si les A_i sont deux à deux disjoints et leur réunion contient E.
- **Partition.** On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E si les A_i sont non vides, deux à deux disjoints et leur réunion est exactement E.

Théorème (Propriétés des opérations ensemblistes)

Soit E un ensemble et $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Alors:

1) **Propriétés de** $\cup$.
$A\cup B = B\cup A$ (commutativité), $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$ (associatitivé), $A\cup\emptyset = A$ ($\emptyset$ est neutre)
2) **Propriétés de** $\cap$.
$A\cap B = B\cap A$ (commutativité), $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$ (associatitivé), $A\cap E = A$ (E est neutre)
3) **Distributivité**. $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$, $\quad A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$
4) **Propriétés du complémentaire**.
$(A^c)^c = A$, $\quad (A\cup B)^c = A^c\cap B^c$, $\quad (A\cap B)^c = A^c\cup B^c$ $\quad$ (lois de De Morgan)

Remarques

Ces propriétés calculatoires se généralisent au cas de réunion ou intersection quelconque d'ensembles.

I.3 Produit cartésien

Définition (Produit cartésien)

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles. On appelle produit cartésien de $E_1, \ldots, E_n$ l'ensemble des n-uplets :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \,/\, \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in E_i\}\,.$$

Dans le cas où les E_i sont égaux à un même ensemble E, l'ensemble $E_1 \times \cdots \times E_n$ est noté E^n.

Exemple $\{0, 1\} \times \{2, 3, 4\} = \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$.

II Applications

II.1 Définitions

Définition (Application)

Soient E et F deux ensembles.

- Une **application** de E vers F est une correspondance telle qu'à tout élément de E on associe un unique élément de F. On note $\begin{array}{rccc} f: & E & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$.
E est l'**ensemble de départ** E, et F l'**ensemble d'arrivée** F. Cette notation se lit "f de E dans F qui à x associe $f(x)$". On dit que f est à valeurs dans F.
- L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E (attention à l'ordre) ou $\mathcal{F}(E, F)$

⚠ **Attention** ⚠

- Les ensembles de départ et d'arrivée font partie de la définition. Ainsi, les applications $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$ même si elles ont même expression sont différentes car les ensembles de départ sont différents.
- Ne pas confondre les flèches $\to$ et $\mapsto$ dans la définition des fonctions.
- Par définition d'une application $f : E \to F$, un élément $x \in E$ à une **unique image** $f(x) \in F$ par f. En revanche, un élément $y \in F$ peut avoir 0**,** 1 **ou plusieurs antécédents** par f.

Définition (Composition)

La **composée** des applications $\begin{array}{cccc} f : & E & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$ et $\begin{array}{cccc} g : & F & \to & G \\ & x & \mapsto & g(x) \end{array}$ est l'application $\begin{array}{cccc} g \circ f : & E & \to & G \\ & x & \mapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}$.

Remarques (Sur la composition)

- Pour que la composition soit compatible, dans la définition précédente, l'ensemble d'arrivée de f doit être inclus dans l'ensemble départ de g.
- La composition est **associative**, c'est-à-dire que pour des ensembles de départ et d'arrivée compatibles, si f, g, h sont des applications alors $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. En revanche la composition n'est **pas commutative** en général i.e. $f \circ g \neq g \circ f$.

Définition (Applications particulières)

- Si f est une application de E vers F et si A est une partie de E, alors l'application $\begin{array}{cccc} f_{|A} : & A & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est appelée la **restriction** de f à A.
- On appelle **application identité** de E l'application $\begin{array}{cccc} \mathrm{Id}_E : & E & \to & E \\ & x & \mapsto & x \end{array}$.
- Si A est une partie de E. On appelle fonction indicatrice de A que l'on note $\mathbb{1}_A$ l'application $\begin{array}{cccc} \mathbb{1}_A : & E & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$.

II.2 Image directe - Image réciproque

Définition (Image directe- Image réciproque)

Soit l'application $f : E \to F$.

- L'**image directe** de $A \subset E$ par f est définie par
$$f(A) = \{f(x) \in F \,/\, x \in A\} = \{y \in F \,/\, \exists x \in A \,,\, y = f(x)\}.$$
L'ensemble $f(A)$ est en fait l'ensemble des images par f des éléments de A.
- L'**image réciproque** de $B \subset F$ par f est défini par
$$\overleftarrow{f}(B) = \{x \in E \,/\, f(x) \in B\}.$$
L'ensemble $\overleftarrow{f}(B)$ est en fait l'ensemble des antécédents par f des éléments de B.

Exemples

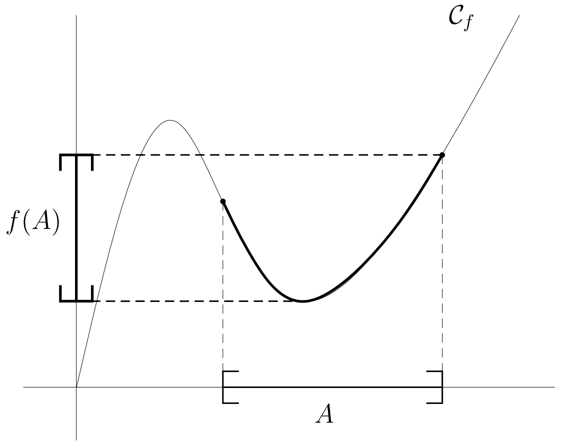


Image directe

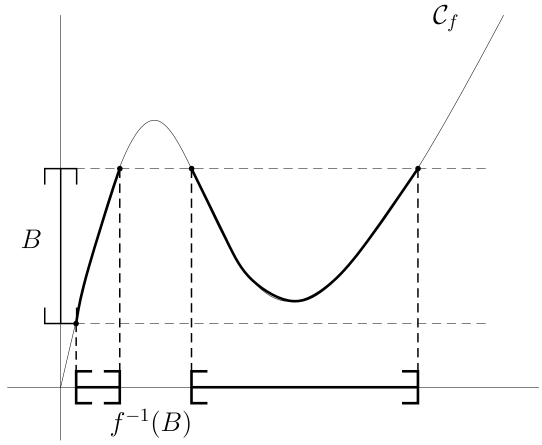


Image réciproque

Exercice.

1) On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x^2$ et $A = \{-3, 1\}$, $B = [-1, 4]$.
Déterminer $f(A)$, $\overleftarrow{f}(B)$, $\overleftarrow{f}(f(A))$, $f(\overleftarrow{f}(B))$.

2) On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \cos x$.
Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f([0, \frac{\pi}{2}])$, $\overleftarrow{f}(\{0\})$, $\overleftarrow{f}([0, \frac{1}{2}])$.

3) On pose $f : MPSI_1 \to [\![1, 12]\!]$ tel que $f(e) = i$ où i est le numéro du mois de naissance.
Déterminer $f(MPSI1_1)$, $f(\{\text{étudiantes de } MPSI_1\})$, $\overleftarrow{f}(\{1\})$.

Exercice.

1) Montrer que pour tout $(A, A') \in (\mathcal{P}(E))^2$, $\quad f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ et $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.

2) Montrer que pour tout $(B, B') \in (\mathcal{P}(F))^2$, $\quad \overleftarrow{f}(B \cup B') = \overleftarrow{f}(B) \cup \overleftarrow{f}(B')$ et $\overleftarrow{f}(B \cap B') = \overleftarrow{f}(B) \cap \overleftarrow{f}(B')$.

II.3 Injection-Surjection-Bijection

II.3.a Injection

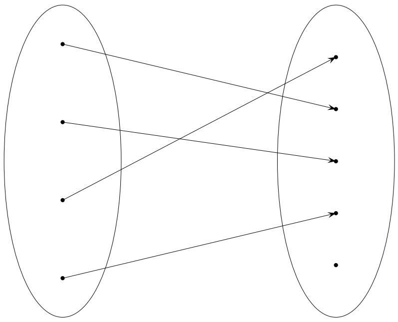
Définition (Injection)

On dit qu'une application de $f : E \to F$ est **injective** si tout élément de F a **au plus un antécédent** par f c'est-à-dire 0 ou 1 antécédent dans E ce qui équivaut à dire que deux éléments différents de E ont des images différentes ou que deux éléments de E ayant même image sont nécessairement égaux, qui mathématiquement s'écrit:

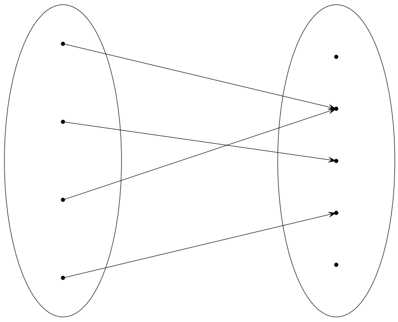
$$\forall (x, x') \in E^2,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x') \qquad \text{ou} \qquad \forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Illustration

- Patatoïde

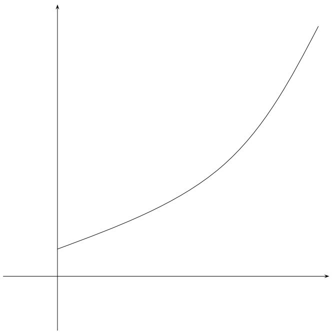


Fonction injective: les éléments à l'arrivée ont 0 ou 1 antécédent au départ.

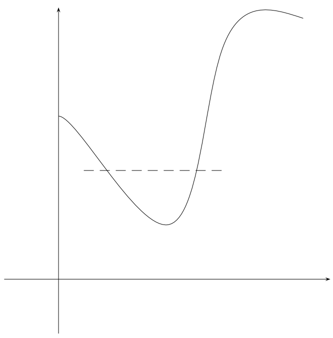


Fonction non injective: le deuxième élement de l'ensemble d'arrivée admet 2 antécédents.

- Graphe



Fonction injective: les éléments à l'arrivée ont 0 ou 1 antécédent au départ.



Fonction non injective: il y a des éléments qui ont deux antécédents.

Exercice. La fonction carré n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ mais l'est sur $\mathbb{R}_+$.
Exercice. Montrer qu'une application strictement croissante est injective.

Remarques

C'est donc précisément l'hypothèse d'injectivité qui permet de conserver l'équivalence quand on applique une fonction à une égalité :

$$a = b \Leftrightarrow f(a) = f(b).$$

Exercice. Montrer que $\operatorname{Arctan} 3 - \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Théorème (Composée d'injections)

La composée de deux applications injectives est injective.

II.3.b Surjection

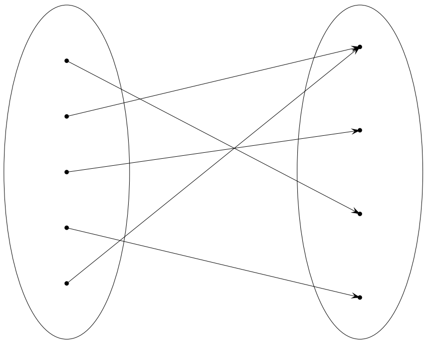
Définition (Surjection)

On dit qu'une application de $f : E \to F$ est **surjective** si tout élément de F a **au moins un antécédent** par f dans E, qui mathématiquement s'écrit:

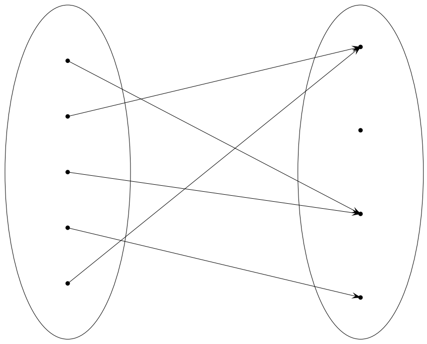
$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x).$$

Illustration

- Patatoïde

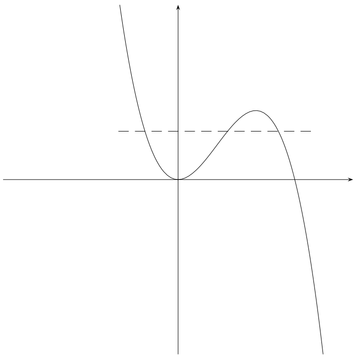


Fonction surjective: les éléments à l'arrivée ont 1 ou 2 antécédents au départ.

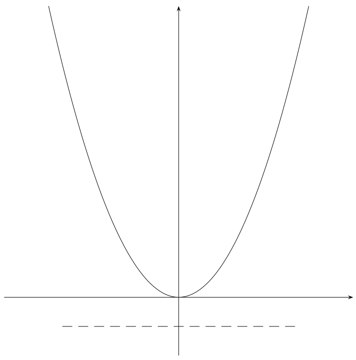


Fonction non surjective: le deuxième élement de l'ensemble d'arrivée n'admet pas d'antécédent.

- Graphe



Fonction surjective: tout élément de $\mathbb{R}$ a au moins un antécédent i.e. tout droite horizontale coupe la courbe au moins une fois.



Fonction non surjective: il y a des éléments qui n'ont pas d'antécédents.

Théorème (Composée de surjections)

La composée de deux applications surjectives est surjective.

II.3.c Bijection

Définition (Bijection)

Soit $f : E \to F$ une application.

- On dit qu'une application de $f : E \to F$ est **bijective** ou est **une bijection** si tout élément de F a un unique antécédent par f dans E, qui mathématiquement s'écrit:

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x).$$

  Autrement dit, f est bijective si et seulement si f est à la fois injective et surjective.

- Si f est une application bijective, la **réciproque** de f est l'application notée $f^{-1} : F \to E$ qui à y associe son unique antécédent par f i.e.

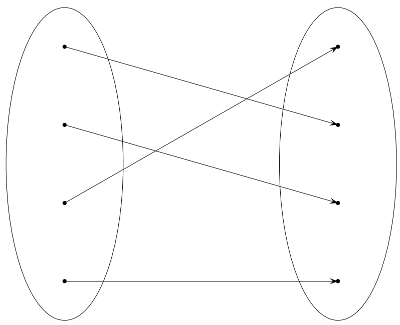
$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

  La fonction réciproque f^{-1} est elle aussi bijective de réciproque f.

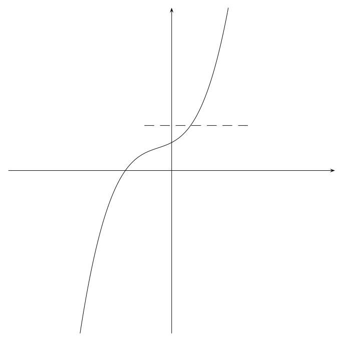
Illustration

Exemples

- Si E et F sont des intervalles de $\mathbb{R}$ ou des ensembles finis

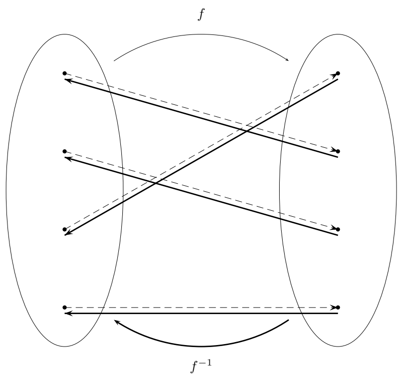


Fonction bijective: les éléments à l'arrivée ont exactement 1 antécédent au départ.

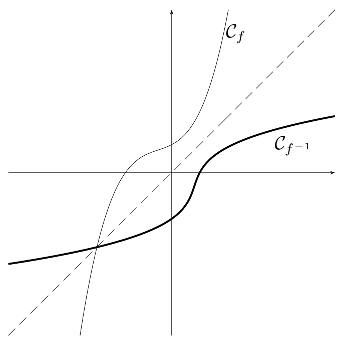


Fonction bijective: tout élément de $\mathbb{R}$ a exactement un antécédent i.e. tout droite horizontale coupe la courbe exactement une fois.

- En gras sur ces deux schémas, la représentation de la fonction réciproque des exemples précédents.



Fonction bijective: on représente la réciproque en inversant le sens des flèches.



Fonction bijective: pour les fonctions de la variable réelle à valeurs réelles, $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est la symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la première bissectrice des axes.

Remarques (Propriétés de la réciproque)

La fonction réciproque f^{-1} de f vérifie $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

Théorème (Caractérisation des bijections)

Une application $f : E \to F$ est bijective **si et seulement si** il existe une application $g : F \to E$ vérifiant $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Dans ce cas: $\quad g = f^{-1}$.

✎ Méthode pratique ✎ (Montrer qu'une application est bijective)

On souhaite prouver la bijectivité de l'application $f : E \to F$.

1) **Méthode 1.** On montre que f est surjective et injective.

2) **Méthode 2.** On résout l'équation $y = f(x)$, et on prouve qu'elle admet une unique solution. Cette méthode fournit de plus à la fin l'expression de la réciproque..

3) **Méthode 3.** À l'aide du théorème de caractérisation des bijections, on a un candidat g à être la bijection. Reste à prouver $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

4) **Méthode 4.** Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On utilise le théorème de la bijection monotone.

Théorème (Composée de bijections)

Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$. Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Théorème (Image directe par f^{-1} et image réciproque.)

Soit $f : E \to F$. On suppose que $\boxed{f \text{ est bijective}}$.
Pour toute partie B de F on a : $\overleftarrow{f}(B) = f^{-1}(B)$.

Remarques (Notation $f^{-1}(B)$ pour l'image réciproque.)

Ce théorème justifie que même si f n'est pas bijective on adopte la notation $f^{-1}(B)$ au lieu de $\overleftarrow{f}(B)$ pour l'image réciproque de B.

III Relations

III.1 Relation binaire

Définition (Relation binaire)

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une partie de $E \times E$. Lorsque le couple (x, y) appartient la relation $\mathcal{R}$, on note plutôt $x\mathcal{R}y$. Et on dit que x est en relation avec y.

☞ **Explication** ☜ Le relation $<$ sur $\{1, 2, 3\}$ met en relation les éléments $1, 2, 3$: $1 < 2$, $1 < 3$, $2 < 3$. La relation $<$ est alors définie comme l'ensemble des couples $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.

Exemples

1) $=$ est une relation sur $\mathbb{R}$.
2) $\leqslant$ est une relation sur $\mathbb{R}$.
3) $\leqslant$ est une relation sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
4) $\subset$ est une relation sur $\mathcal{P}(E)$ où E est un ensemble.
5) $|$ (divisibilité) est une relation sur $\mathbb{Z}$.
6) La relation de congruence modulo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\equiv ...[\alpha]$.

III.2 Relation d'équivalence

Définition (Relation d'équivalence)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E si

- $\mathcal{R}$ est **réflexive** : $\forall x \in \mathbb{E}, \quad x\mathcal{R}x$
- $\mathcal{R}$ est **symétrique** : $\forall (x,y) \in \mathbb{E}^2, \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
- $\mathcal{R}$ est **transitive** : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{E}^3, \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Exemples

1) $=$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2) La relation de congruence $\equiv ...[\alpha]$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est une relation d'équivalence.
3) La relation de congruence $\equiv ...[n]$ où $n \in \mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence.
4) Les relations $\leqslant$, $\subset$ et $|$ vues ci-dessus n'en sont pas (pas de symétrie).

Théorème-Définition (Classe d'équivalence)

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.

- Soit $x \in E$. On appelle **classe d'équivalence** de x pour la relation $\mathcal{R}$ que l'on note $\mathrm{Cl}(x)$, le sous-ensemble de E constitué des éléments en relation avec x, c'est-à-dire:

$$\mathrm{Cl}(x) = \{y \in E \ / \ x\mathcal{R}y\}.$$

- Les classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$ forment une **partition** de E. C'est-à-dire que les classes d'équivalence sont non vides, deux à deux disjointes et leur réunion est E.

III.3 Relation d'ordre

Définition (Relation d'ordre)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E si

- $\mathcal{R}$ est **réflexive** : $\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x$
- $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** : $\forall (x,y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.
- $\mathcal{R}$ est **transitive** : $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

L'ensemble E muni de $\mathcal{R}$ est dit ordonné.

Exemples

1) Les relations $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont des relations d'ordre.
2) La relation $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre.
3) Le relation $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ mais pas sur $\mathbb{Z}$.

Définition (Ordre total, ordre partiel)

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E. On dit que la relation $\mathcal{R}$ est **totale** si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables par $\mathcal{R}$ c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad x\,\mathcal{R}\,y \text{ ou } y\,\mathcal{R}\,x.$$

Sinon, l'ordre est dit **partiel**.

Exemples

1) La relation d'ordre $\leqslant$ sur est totale $\mathbb{R}$ et est partielle sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2) La relation d'ordre $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est partielle.
3) Le relation d'ordre $|$ sur $\mathbb{N}$ est partielle.