Chapitre Fonctions d'une variable réelle : limites, continuité.

Dans tout ce chapitre, I,J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ désigne $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

I Compléments sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

I.1 Voisinage

Définition (Voisinages)

- Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un **voisinage de** a s'il existe $\delta > 0$ tel que $]a-\delta, a+\delta[\subset V$ (on peut aussi autoriser un intervalle fermé $[a-\delta, a+\delta] \subset V$).
- On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un **voisinage de** $+\infty$ s'il existe un réel $A > 0$ tel que $[A, +\infty[\subset V$.
- On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un **voisinage de** $-\infty$ s'il existe un réel $B < 0$ tel que $]-\infty, B] \subset V$.

Remarques (Propriété d'une fonction au voisinage d'un point x_0)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in \overline{I}$, a éventuellement $-\infty$ ou $+\infty$.
On dire que la fonction f vérifie une propriété au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a tel que la propriété soit vraie au voisinage de a.
On oppose ici une **propriéte locale** d'une fonction, vraie au voisinage d'un point, et une **propriété globale**, vraie sur tout l'intervalle I.
Cette notion est l'analogue pour les fonctions de la locution "*propriété vraie à partir d'un certain rang pour les suites*"

Exercice.

1) Ecrire que la fonction f est majorée au voisinage de 2, que la fonction f est bornée au voinage de $+\infty$.
2) La fonction inverse est-elle bornée? Est-elle bornée au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_+^*$.

I.2 sup-inf-max-min

Définition (Borne supérieure-Borne inférieure)

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Si f est majorée sur I alors $f(I)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée donc admet une borne supérieure appelée **borne supérieure de** f sur I et notée $\sup\limits_I f$ ou $\sup\limits_{x\in I} f(x)$.
- Si f est minorée sur I alors $f(I)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée donc admet une borne inférieure appelée **borne inférieure de** f sur I et notée $\inf\limits_I f$ ou $\inf\limits_{x\in I} f(x)$.

Exercice. 1) Montrer que $\sup\limits_{x>0} \dfrac{1}{x}$ n'existe pas et $\inf\limits_{x>0} \dfrac{1}{x} = 0$. 2) Déterminer $\sup\limits_{\mathbb{R}_+} \operatorname{Arctan}$ et $\inf\limits_{\mathbb{R}_+} \operatorname{Arctan}$.

Définition (Maximum-Minimum)

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

- f admet un **maximum global** noté $\max\limits_I f$ en $a \in I$ si : $\quad \forall x \in I,\ f(x) \leqslant f(a)$.
- f admet un **minimum global** noté $\min\limits_I f$ en $a \in I$ si : $\quad \forall x \in I,\ f(x) \geqslant f(a)$.
- f admet un **extremum global** si elle admet un maximum ou un minimum global.
- f admet un **maximum local** si au voisinage de a, $f(x) \leqslant f(a)$ c'est-à-dire
$$\exists \delta > 0 \,/\, \forall x \in [a-\delta, a+\delta],\ f(x) \leqslant f(a).$$
- f admet un **minimum local** si au voisinage de a, $f(x) \geqslant f(a)$ c'est-à-dire
$$\exists \delta > 0 \,/\, \forall x \in [a-\delta, a+\delta],\ f(x) \geqslant f(a).$$
- f admet un **extremum local** si elle admet un maximum ou un minimum local.

Remarques (Borne supérieure $\overset{?}{=}$ maximum)

Si la borne supérieure est atteinte c'est le maximum. Par exemple $\sup\limits_{\mathbb{R}} \cos = 1$ peut s'écrire $\max\limits_{\mathbb{R}} \cos = 1$ car $\cos 0 = 1$. En revanche $\sup\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{Arctan} = \dfrac{\pi}{2}$ n'est pas atteinte, ça n'est pas le maximum.

II Limite d'une fonction

II.1 Limite en un point

Définition (Limite d'une fonction en un point)

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in \overline{I}$ et $l \in \mathbb{R}$.

- f admet l pour limite en a, noté $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ si:
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$
- f admet l pour limite en $+\infty$, noté $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l$ si:
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0 \,/\, \forall x \in I,\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$
- f admet l pour limite en $-\infty$, noté $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ ou $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} l$ si:
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A < 0 \,/\, \forall x \in I,\ x \leqslant A \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$
- f admet $+\infty$ pour limite en a, noté $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ si:
$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow f(x) \geqslant A.$$
- f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$, noté $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si:
$$\forall A > 0,\ \exists B > 0 \,/\, \forall x \in I,\ x \geqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A$$
- f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$, noté $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si:
$$\forall A > 0,\ \exists B < 0 \,/\, \forall x \in I,\ x \leqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A.$$
- Définitions analogues si la limite est $-\infty$.

☞ **Explication** ☜ On peut expliquer ces définitions à l'aide des voisinages. Par exemple pour $\lim_{x\to a} f(x) = l$, la définition signifie que pour tout voisinage V_l de l, il existe un voisinage V_a de a tel que pour tout $x \in V_a$ alors $f(x) \in V_l$. On a une définition similaire pour toutes les autres limites. [Faire un dessin illustratif].

Théorème

Soient $f \in \mathbb{R}^I$, $a \in \overline{I}$, a éventuellement infini et $l \in \mathbb{R}$.

1) $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow f(x) - l \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow |f(x) - l| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$

2) $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \boxed{\Rightarrow} |f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} |l|$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$

3) Si a est fini : $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow f(a+h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} l$.

☞ **Explication** ☜ La propriété 3) justifie que le calcul d'une limite en a se ramène au calcul d'une limite en 0 en posant $x = a + h$.

Théorème (Unicité de la limite)

Si la limite existe alors elle est unique.

Définition (Limite à gauche, à droite)

Soit $f \in \mathbb{R}^I$, $a \in \overline{I}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$ ou événtuellement infini.
On dit que f admet pour limite l à gauche (resp. à droite) en a si la restriction de $f_{|I\cap]-\infty,a[}$ (resp. $f_{|I\cap]a,+\infty[}$) admet l pour limite. On note:

$$\lim_{x\to a_-} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to a_-}{\longrightarrow} l \qquad (\text{resp.} \lim_{x\to a_+} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to a_+}{\longrightarrow} l).$$

Remarques (Définition avec les ε)

Pour les limites à gauche:

$$\begin{array}{ll} l \in \mathbb{R} : & \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, \forall x \in I,\ a - \delta \leqslant x < a \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon \\ l = +\infty : & \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0 \,/\, \forall x \in I,\ a - \delta \leqslant x < a \Rightarrow f(x) \geqslant A \\ l = -\infty : & \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0 \,/\, \forall x \in I,\ a - \delta \leqslant x < a \Rightarrow f(x) \leqslant A. \end{array}$$

Pour les limites à droite "$a - \delta \leqslant x < a$" est remplacé par $a < x \leqslant a + \delta$.

Exercice. Déterminer la limite à gauche et à droite en 0 de la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

II.2 Limites et inégalités

Théorème (Limite donne une borne)

Soient $f \in \mathbb{R}^I$, $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $l \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

1) Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

2) Si f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < l < \beta$ alors $\alpha < f(x) < \beta$ pour x au voisinage de a.

⚠ **Attention** ⚠ Contrairement aux suites, une fonction bornée au voisinage d'un point n'est pas nécessairement bornée.

☞ **Explication** ☜ On utilise souvent 2) dans le cas $l > 0$. Autrement dit, si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ avec $l > 0$ alors $f(x) > 0$ au voisinage de a.

Théorème (Passage à la limite dans les inégalités)

Soient $(f,g) \in (\mathbb{R}^I)^2$, $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $(l,l') \in \mathbb{R}^2$.

Si $\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l' \end{cases}$ et $f(x) \leqslant g(x)$ (resp. $f(x) < g(x)$) pour x au voisinage de a alors: $\quad l \leqslant l'$.

Cas particulier : on suppose $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$.

- Si $f(x) \leqslant M$ (ou $f(x) < M$) au voisinage de a alors : $\quad l \leqslant M$
- Si $m \leqslant f(x)$ (ou $m < f(x)$) au voisinage de a alors : $\quad m \leqslant l$.

NB : le passage à la limite d'inégalités strictes donne une inégalité large. Contre-exemples?

II.3 Opérations sur les limites

Soient $(f,g) \in (\mathbb{R}^I)^2$ deux fonctions. Soit $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

⚠ **Attention** ⚠ Dans le cas de la forme indéterminée $+\infty - (+\infty)$ tous les cas peuvent se produire:

- $f(x) = x+1$, $g(x) = x$, alors $f(x) - g(x) = 1 \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$
- $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2$, alors $f(x) - g(x) = x \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$
- $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + x$, alors $f(x) - g(x) = -x \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$

Multiplication par un scalaire

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (\lambda f(x))$	λl	$+\infty$ si $\lambda > 0$ 0 si $\lambda = 0$ $-\infty$ si $\lambda < 0$	$-\infty$ si $\lambda > 0$ 0 si $\lambda = 0$ $+\infty$ si $\lambda < 0$

Produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

⚠ **Attention** ⚠ Dans le cas de la forme indéterminée $0 \times (\pm\infty)$ tous les cas peuvent se produire:

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x$, alors $f(x)g(x) = 1 \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$
- $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = x$, alors $f(x)g(x) = \dfrac{1}{x} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^2$, alors $f(x)g(x) = x \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.

Inverse

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	0^+	0^-
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$	$\dfrac{1}{l}$	0	$+\infty$	$-\infty$

☞ **Explication** ☜ Par $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0^+$ (resp. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0^-$), il faut comprendre

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \\ f(x) > 0 \text{ (resp. } f(x) < 0\text{) au voisinage de } a \end{cases}$$

.

Quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	0	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	0	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{l}{l'}$	0	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

⚠ **Attention** ⚠ Dans le cas de la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ tous les cas peuvent se produire:

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, alors $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$
- $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, alors $\frac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{x} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, alors $\frac{f(x)}{g(x)} = x \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.

Contre-exemples similaires pour le cas $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, en prenant les inverses des fonctions f et g ci-dessus.

Composition

Théorème (Limite d'une composée)

Soients :

- $f \in \mathbb{R}^I$ et $g \in \mathbb{R}^J$ tels que $f(I) \subset J$
- $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- $b \in \overline{J} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- $l \in \overline{\mathbb{R}}$

Supposons $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ et $g(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} l$ alors $(g \circ f)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$.

Image d'une suite

Théorème (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soients :

- $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction avec I un intervalle
- $a \in \overline{I}$ ou $-\infty$ ou $+\infty$
- $l \in \mathbb{R}$ ou $-\infty$ ou $+\infty$

$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ **si et seulement si** pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I qui admet pour limite a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite l.

☞ **Explication** ☜ En particulier, on retrouve avec la condition nécessaire $\Rightarrow$ le théorème **d'image d'une suite par une fonction** (vu dans le chapitre sur les suites sans démonstration) permettant de calculer la limite de $f(u_n)$.

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Prouver qu'une fonction n'admet pas de limite en a)**

Pour montrer que qu'une fonction f n'admet pas de limite en a,

- soit on détermine une suite $(x_n)_n$ d'éléments de I de limite a telle que $(f(x_n))_n$ n'a pas de limite
- soit on détermine deux suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ d'éléments de I de limite a telles que $f(x_n))_n$ et $(f(y_n))_n$ possèdent deux limites distinctes.

Exercice. Montrer que $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0.

II.4 Limite par encadrement, majoration, minoration

Théorème (Théorème des "gendarmes" ou d'encadrement)

Soient $(f, g, h) \in (\mathbb{R}^I)^3$, $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $l \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) & \text{au voisinage de } a \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \ \text{ et } h(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \end{cases} \qquad \text{alors} \quad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$$

Corollaire

Soient $(f, \varphi) \in (\mathbb{R}^I)^2$, $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $l \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} |f(x) - l| \leqslant \varphi(x) & \text{au voisinage de } a \\ \varphi(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \qquad \text{alors} \quad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l.$$

Exercice.

1) Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

2) Déterminer la limite en 0 de $f(x) = x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3) Déterminer la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de $f(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

Théorème (Théorème de minoration, de majoration)

Soient $(f, g) \in (\mathbb{R}^I)^3$, $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1) Si $\begin{cases} f(x) \leqslant g(x) & \text{au voisinage de } a \\ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \end{cases}$ alors $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.

2) si $\begin{cases} f(x) \leqslant g(x) & \text{au voisinage de } a \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty \end{cases}$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$.

II.5 Théorème de la limite monotone

Théorème (Théorème de la limite monotone)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ou $-\infty$ ou $+\infty$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1)
- Si f est majorée, alors f admet une limite finie l en b et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \sup\limits_{]a,b[} f$
- Si f n'est pas majorée, alors $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} +\infty$.

2)
- Si f est minorée, alors f admet une limite finie l en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \inf\limits_{]a,b[} f$
- Si f n'est pas minorée, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$.

Résultats similaires si f est décroissante.

Exercice. Démontrer que ln admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

III Continuité en un point

Théorème-Définition (Continuité en un point)

Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $\boxed{a \in I}$.

- Si f admet une limite finie en a alors la limite est $f(a)$.
- On dit que f est **continue en** a si f admet une limite finie en a et donc :

  f est **continue en** a si seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- f est **continue à gauche** (resp. **continue à droite**) en a si $\lim\limits_{x\to a_-} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim\limits_{x\to a_+} f(x) = f(a)$).

Exercice. On pose $f(x) = \begin{cases} x\ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Montrer que f est continue en 0.

Remarques (Continuité en un point = propriété locale)

La continuité en un point est une propriété locale car on ne tient compte du comportement de la fonction au voisinage du point sans regarder ce qu'il se passe ailleurs.

Théorème (Caractérisation de la continuité)

Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$. Alors f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.

Théorème (Caractérisation séquentielle de continuité)

Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$. Alors :
f est continue en a **si et seulement si** pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I qui qui converge vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Remarques (Utilisation de ce théorème)

- On a utilisé ce théorème pour passer à la limite la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et f est continue en l alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(l)$.
- On peut utiliser ce théorème pour transférer des propriétés valables sur les rationnels.

Exercice.

1) La suite définie par $u_{n+1} = 1 + u_n^2$ peut-elle converger?

2) Déterminer les fonctions continues en tout point de $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

Définition (Prolongement par continuité)

Soient $a \in I$ et f définie sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et est finie, que l'on note l. On peut alors prolonger f par continuité en a en posant $\begin{array}{rccl} \widetilde{f}: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$.

Remarques

1) Souvent le prolongement est encore noté f.
2) ⚠ **Attention** ⚠ On ne prolonge pas la dérivée d'une fonction. Une fonction prolongée en x_0 est dérivable ou ne l'est pas.

Exercice. Prolonger par continuité en 0 la fonction $f : x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$.

IV Continuité sur un intervalle

IV.1 Ensemble des fonctions continues sur un intervalle

Définition (Ensemble des fonctions continues)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{R}^I$.
On dit que f est **continue sur** I si f est continue en tout point de I.
On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ leur ensemble. Une fonction continue est dite de classe $\mathcal{C}^0$.

☞ **Explication** ☜ La continuité correspond au fait que le tracé de la courbe peut s'effectuer sans lever le crayon. La continuité sur un intervalle est une **propriété globale** contrairement à la continuité en un point.

Exemples Les fonctions usuelles: $|\cdot|$, $x \mapsto x$, fonctions polynomiales, fonctions fractions rationnelles, exp, ln, fonctions trigonométriques circulaires et hyperpoliques et leur réciproque sont continues là où elles sont définies.

Théorème (Opérations sur $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$)

1) Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les fonctions:

$$|f|, \qquad f + g, \qquad \lambda f, \qquad fg, \qquad \frac{f}{g} \ \text{(si } g \text{ ne s'annule pas sur } I\text{)}$$

sont continues sur I. Autrement dit, $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est stable pour le produit, la somme, la multiplication par un scalaire, par le quotient.

2) Soient f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur un intervalle J telles que $f(I) \subset J$. Alors $(g \circ f)$ est continue sur I.

✎ Méthode pratique ✎ (Comment étudier la continuité d'une fonction)

- **Continuité en un point** $a \in I$:
  - **Méthode 1** : on montre que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.
  - **Méthode 2** : si l'expression de f diffère à gauche et à droite de a, on montre que $f(x) \underset{x \to a_+}{\longrightarrow} f(a)$ et $f(x) \underset{x \to a_-}{\longrightarrow} f(a)$.
- **Continuité sur un intervalle** I. On utilise le théorème ci-dessus d'opérations sur les fonctions continues en "décortiquant" la fonction à étudier.

Exercice.

1) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Montrer que les fonctions $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont continues sur I.
On pourra écrire ces fonctions à à l'aide de $(f+g)$ *et* $|f-g|$.

2) Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

IV.2 Les grands théorèmes de la continuité

IV.2.a Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I. Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.
Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$.

Remarques

1) L'hypothèse de continuité est essentielle, sans quoi c n'existe pas forcément.

2) Le TVI montre l'existence d'un c mais pas l'unicité. Pour obtenir l'unicité il faut utiliser le théorème de la bijection monotone.

En pratique , on utilise souvent le corollaire suivant:

Corollaire (Résolution de $f(x) = 0$)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I. Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.
Si $f(a)f(b) \leqslant 0$ (resp. < 0) alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$ (resp. $]a, b[$).

Exercice.

1) Montrer que l'équation $\mathrm{e}^{-x} = x$ admet au moins une solution dans $]0,1[$.

2) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe.

Proposition

Une fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone.

IV.2.b Image d'un intervalle

Théorème (Image d'un intervalle par une fonction continue)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

⚠ **Attention** ⚠ L'intervalle initial et l'intervalle image ne sont pas forcément de même nature. Donner des exemples.

Remarques

Ce théorème peut-être utilisé pour montrer qu'une application n'est pas continue. En montrant que l'image d'un intervalle n'est pas forcément un intervalle.

Exercice. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Montrer que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. *On pourra étudier* $f([0,1])$.

Théorème (Image d'un intervalle et monotonie)

Soient I un intervalle et f une fonction continue sur I. Soit $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$. Alors:

1) si f est strictement croissante sur I alors
   - $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$
   - $f(]a,b]) =]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), f(b)]$
   - $f([a,b[) = [f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$
   - $f(]a,b[) =]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$

2) si f est strictement décroissante sur I alors
   - $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$
   - $f(]a,b]) = [f(b), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
   - $f([a,b[) =]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a)]$
   - $f(]a,b[) =]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$.

Théorème (Image d'un segment par une fonction continue)

L'image d'un segment par une application continue est un segment.
De façon similaire, soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et f une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes c'est-à-dire possède un maximum et un minimum.

Exercice.

1) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \mapsto f(\sin x)$ est bornée.

2) Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que: $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) > 0$.
Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que: $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) \geqslant m$. Le résultat est-il vrai si f est continue sur $]0, 1[$.

IV.2.c Théorème de la bijection monotone

Théorème (Bijection monotone)

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que

(i) f continue sur I

(ii) f strictement monotone sur I.

Alors f réalise une bijection de I vers $J = f(I)$ de fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ avec de plus:

1) J est un intervalle dont les bornes sont les images par f (ou les limites) des bornes de I

2) f^{-1} est strictement monotone sur J de même sens de variations que f

3) f^{-1} est continue sur J

Remarques

1) Ce théorème a déjà été utilisé pour justifier l'existence des fonctions exp, Arccos, Arcsin, Arctan.

2) Ce théorème est utilisé pour montrer l'existence et l'unicité de la solution d'une équation (cf. chapitre sur les bases de l'analyse).

V Fonctions à valeurs complexes

On donne dans cette partie quelques éléments sur les fonctions f définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$.

V.1 Définitions

Définition

Soit $f \in \mathbb{C}^I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

- On définit les fonctions parties réelle et imaginaire de f:

$$\mathrm{Re}(f) : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Re}(f(x)) \end{array} \qquad \mathrm{Im}(f) : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Im}(f(x)) \end{array}.$$

- f est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leqslant M$.

Exemple La fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ est bornéee sur $\mathbb{R}$, car pour tout $t \in \mathbb{C}$, $|f(t)| = 1$.

Définition (Limite et continuité)

Soient $f \in \mathbb{C}^I$, $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $l \in \mathbb{C}$.

- f admet l pour limite en a, noté $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ si : $\quad |f(x) - l| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.
- Si $a \in I$, on dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Remarques

1) Il n'y a pas de notion de limite égale à $\pm\infty$.
2) Les notions de limites à gauche et à droite sont conservées.

Exercice. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}}{x}$.

Théorème (Caractérisation avec les parties réelle et imaginaire)

Soient $f \in \mathbb{C}^I$ et $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1) Soit $l \in \mathbb{C}$. Alors: $\quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{Re}(f(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(l) \\ \mathrm{Im}(f(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(l) \end{cases}$.

   Dans ce cas $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{Re}(f(x)) = \mathrm{Re}\left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)$, $\quad \lim\limits_{x \to a} \mathrm{Im}(f(x)) = \mathrm{Im}\left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)$.
   NB : on peut donc échanger les symboles lim et Re/Im.
2) Si $a \in I$. Alors f est continue en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues en a.

Exercice. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarques

- **Ce qui est encore valable**: la caractérisation séquentielle de la limite, caractérisation séquentielle de la continuité, les opérations sur les limites.
- **Ce qui n'est plus valable**: notion de fonction majorée-minorée (pas d'ordre), passage à la limite d'ingéalités, théorème des gendarmes, théorème de la limite monotone (car pas d'ordre), le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème de la bijection.

VI Comparaison des fonctions

VI.1 Négligeabilité - Domination

Définition (Négligeabilité - Domination)

Soient $(f,g) \in (\mathbb{R}^I)^2$ tel que g ne s'annule pas au voisinage de a et $a \in \overline{I} \cup -\infty, +\infty$

- f est **négligeable devant** g au voisinage de a si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
  On note $f = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g)$ ou $f = \mathrm{o}_a(g)$, on dit que "$f(x)$ est un petit o de $g(x)$".

- f est **dominée devant** g au voisinage de a si $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.
  On note $f = \underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g)$ ou $f = \mathrm{O}_a(g)$, on dit que "$f(x)$ est un grand O de $g(x)$".

Exemples

1) $x^2 = \mathrm{o}_{+\infty}\left(x^4\right)$ car $\dfrac{x^2}{x^4} = \dfrac{1}{x^2} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$

2) $x^5 = \mathrm{o}_0\left(x^3\right)$ car $\dfrac{x^5}{x^3} = x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

3) $\dfrac{x^2}{x+1} = \mathrm{O}_{+\infty}(x)$ car $\left|\dfrac{x^2}{x(x+1)}\right| \leqslant \dfrac{x^2}{x^2} \leqslant 1$.

Remarques (Quelques propriétés)

- "Un petit o est un grand O" : $f = \mathrm{o}_a(g) \Rightarrow f = \mathrm{O}_a(g)$.
- $f(x) = \mathrm{o}_a(1)$ signifie que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$
- $f(x) = \mathrm{O}_a(1)$ signifie que f est bornée au voisinage de a.

Théorème (Opérations sur les o)

Soient f_1, f_2, g_1, g_2, f, g et h des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, $a \in \overline{I} \cup \{-\infty,+\infty\}$, λ, α des réels.

1) $\boxed{\text{Si } \lambda \neq 0}$, $\quad f = \mathrm{o}_a(g) \Rightarrow \begin{cases} f = \mathrm{o}_a(\lambda g) \\ \lambda f = \mathrm{o}_a(g) \end{cases}$

2) $\begin{cases} f_1 = \mathrm{o}_a(g) \\ f_2 = \mathrm{o}_a(g) \end{cases} \Rightarrow f_1 + f_2 = \mathrm{o}_a(g)$

3) $\begin{cases} f_1 = \mathrm{o}_a(g_1) \\ f_2 = \mathrm{o}_a(g_2) \end{cases} \Rightarrow f_1 f_2 = \mathrm{o}_a(g_1 g_2)$

4) $f_1 = \mathrm{o}_a(f_2) \Rightarrow f_1 g = \mathrm{o}_a(f_2 g)$

5) $\boxed{\text{Si } \alpha > 0}$, $\begin{cases} f > 0 \text{ et } g > 0 \\ f = \mathrm{o}_a(g) \end{cases} \Rightarrow f^\alpha = \mathrm{o}_a(g^\alpha)$

6) $\begin{cases} f = \mathrm{o}_a(g) \\ g = \mathrm{o}_a(h) \end{cases} \Rightarrow f = \mathrm{o}_a(h)$, (la relation o est transitive)

⚠ **Attention** ⚠ Certaines opérations sont illicites avec les o.

- **La somme**: si $f_1 = \mathrm{o}_a(g_1)$ et $f_2 = \mathrm{o}_a(g_2)$, alors on n'a pas nécessairement $f_1 + f_2 = \mathrm{o}_a(g_1 + g_2)$.
  Par exemple $x - 1 = \mathrm{o}_{+\infty}\left(x^2\right)$ et $1 = \mathrm{o}_{+\infty}\left(1 - x^2\right)$ pourtant $x \neq \mathrm{o}_{+\infty}(1)$.

- **La composition**: si $f = \mathrm{o}_a(g)$, alors on n'a pas nécessairement $\varphi \circ f = \mathrm{o}_a(\varphi \circ g)$.
  Par exemple avec $x = \mathrm{o}_{+\infty}\left(x^2\right)$ et $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$, alors $\dfrac{1}{x} \neq \mathrm{o}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Remarques (Opération sur les O)

On a pour "grand O" les mêmes propriétés que petit o (remplacer o par O).

Théorème (Comparaisons des fonctions de référence)

Soient α, β, γ des réels strictement positifs.

1) Si $\alpha < \beta$ alors $x^\alpha = \mathrm{o}_{+\infty}(x^\beta)$.
2) Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors $(\ln x)^\beta = \mathrm{o}_{+\infty}(x^\alpha)$.
3) Si $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ alors $x^\alpha = \mathrm{o}_{+\infty}(e^{\gamma x})$.
4) Si $0 < \alpha < \beta$ alors $x^\beta = \mathrm{o}_0(x^\alpha)$.
5) Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors $|\ln x|^\beta = \mathrm{o}_0\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$.

Exercice. Ranger par ordre de négligeabilité au voisinage de $+\infty$:

$$x^3\,\mathrm{e}^x,\quad (\ln x)^3,\quad x^5,\quad \frac{\mathrm{e}^x}{x^3},\quad x(\ln x)^4,\quad \mathrm{e}^{3x},\quad \frac{x^3}{(\ln x)^4},\quad x^4(\ln x)^2,\quad (\ln x)\,\mathrm{e}^{6x}\,.$$

VI.2 Équivalence

Définition (Équivalence)

Soient $(f,g) \in (\mathbb{R}^I)^2$ tel que g ne s'annule pas au voisinage de a et $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

On dit que f et g sont **équivalentes** noté $f \underset{a}{\sim} g$ si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.

Cela revient à dire : $f - g = \mathrm{o}_a(g)$ **c'est-à-dire** $f = g + \mathrm{o}_a(g)$.

Exemples

- $2x^2 - x + 3 \underset{+\infty}{\sim} 2x^2$ car $\dfrac{2x^2 - x + 3}{2x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ ou $2x^2 - x + 3 = 2x^3 + \mathrm{o}_{+\infty}(x^2)$
- $x + \ln x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$ ou $x + \ln x + 1 = x + \mathrm{o}_{+\infty}(x)$.
- $2x^2 + 5x \underset{0}{\sim} 5x$ car $\dfrac{2x^2+5x}{5x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ ou $2x^2 + 5x = 5x + \mathrm{o}_0(5x)$.

Remarques

- La relation $\sim$ est symétrique : $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow g \underset{a}{\sim} f$.
- ⚠ **Attention** ⚠ **Il est faux d'écrire** $f \underset{a}{\sim} g \iff f - g \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$. Ni même $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$ qui sont fausses. En effet,
  - $x \underset{+\infty}{\sim} x+1$ alors que $(x+1) - x = 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
  - $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors que $\dfrac{1}{x} \underset{+\infty}{\not\sim} \dfrac{1}{x^2}$.
- ⚠ **Attention** ⚠ **Il est incorrect d'écrire** $f \underset{a}{\sim} 0$
- **Un équivalent permet d'obtenir le signe de la fonction au voisinage de** a
  Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors f et g sont de même signe au voisinage de a.

Théorème (Opérations sur les équivalents)

Soient f_1, f_2, g_1, g_2, f, g et h des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) **La relation $\sim$ est transitive** : $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} g \\ g \underset{a}{\sim} h \end{cases} \Rightarrow f \underset{a}{\sim} h$, (la relation $\sim$ est transitive)

2) **On peut faire le produit d'équivalents** : $\begin{cases} f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \\ f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \end{cases} \Rightarrow f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$

3) **On peut faire le quotient d'équivalents** : $\begin{cases} f \text{ et } g \text{ ne s'annulent pas au } V(a) \\ f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \\ f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$

4) **On peut prendre la puissance d'équivalents** : $\begin{cases} f > 0 \text{ et } g > 0 \\ f \underset{a}{\sim} g \end{cases} \Rightarrow f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$

5) **On ne peut pas faire la somme mais....** : $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} h \\ g = o_a(h) \end{cases} \Rightarrow f + g \underset{a}{\sim} h$

⚠ **Attention** ⚠ Certaines opérations sont illicites avec les équivalents.

- **La somme**: si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors on n'a pas nécessairement $f_1 + f_2 \underset{+\infty}{\sim} g_1 + g_2$.
  Par exemple $x^2 - 1 \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et $-x^2 \underset{+\infty}{\sim} 1 - x^2$ pourtant $-1 \underset{+\infty}{\not\sim} 1$.
- **La composition**: si $f \underset{a}{\sim} g$, alors on n'a pas nécessairement $\varphi \circ f \underset{a}{\sim} \varphi \circ g$.
  Par exemple avec $x \underset{+\infty}{\sim} x + \ln x$, alors $e^x \underset{+\infty}{\not\sim} x\, e^x$.

Exercice. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ dans les cas suivants:

1) $f(x) = \dfrac{3x^3 + 5x^2 - 4x + 1}{2x^2 - 5x + 7}$ au voisinage de 0 et $+\infty$

2) $f(x) = \ln(x) + x$ au voisinage de 0 et $+\infty$

3) $f(x) = \text{ch}(x)$ au voisinage de $+\infty$

4) $f(x) = \sqrt{3x^4 - 4x^2 + 1}$

☞ **Explication** ☜ Un équivalent simple est un produit, quotient, ou puissance de fonctions de référence.

Théorème (Lien entre limites et équivalents)

Soient f et g des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\boxed{l \neq 0}$. Alors $f(x) \underset{a}{\sim} l$.

2) Si $f \underset{a}{\sim} g$, on a l'alternative suivante:
   - **ou bien** f et g ont toutes les deux une limite (finie ou infinie) en a et elles sont égales
   - **ou bien** f et g n'ont pas de limite en a.

Exercice. Déterminer la limite de $f(x)$ dans les cas suivants:

1) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 7}{3x^2 - 5x + 2}$ en $+\infty$

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2 + \ln x - 4}}{e^{3x} + x^2 - 3\ln x}$ en $+\infty$.

Théorème (Équivalents usuels)

$$\sin u \underset{0}{\sim} u \qquad \operatorname{sh} u \underset{0}{\sim} u \qquad \tan u \underset{0}{\sim} u \qquad \operatorname{th} u \underset{0}{\sim} u \qquad \operatorname{Arcsin} u \underset{0}{\sim} u$$

$$\operatorname{Arctan} u \underset{0}{\sim} u \qquad \ln(1+u) \underset{0}{\sim} u \qquad (1+u)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha u \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^u - 1 \underset{0}{\sim} u$$

$$\cos u - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{u^2}{2} \qquad \operatorname{ch} u - 1 \underset{0}{\sim} \frac{u^2}{2}.$$

Méthode pratique (Remarques utiles pour le calcul de limites à l'aide d'équivalents)

On cherche à calculer la limite en a de $f(x)$.

1) On cherche un équivalent $g(x)$ de $f(x)$. La limite de $f(x)$ est celle de $g(x)$.

2) On peut utiliser les équivalents au cours du calcul sans chercher à obtenir un équivalent de $f(x)$. C'est le cas lorsque $f(x) = \mathrm{e}^{g(x)}$. On détermine un équivalent de $g(x)$, puis la limite de $g(x)$. Enfin, **on compose la limite (et pas l'équivalent) par l'exponentielle** pour obtenir la limite de $f(x)$.

3) Si $f(x)$ est de la forme $u(x)^{v(x)}$ on écrit : $f(x) = \mathrm{e}^{v(x)\ln(u(x))}$.

Méthode pratique (Déterminer l'équivalent d'une somme)

On souhaite déterminer un équivalent de $f(x) + g(x)$.

- On détermine un équivalent de f et g : $f \underset{a}{\sim} u$ et $g \underset{a}{\sim} v$.
- Puis, trois cas de figure.
  - Si l'un des équivalents est négligeable devant l'autre par exemple $u = \mathrm{o}_a(v)$ alors $f + g \underset{a}{\sim} v$.
  - Si u et v sont proportionnels, $u = \lambda v$ et $u + v \neq 0$ alors on réécrit les équivalents sous forme :

$$f = u + \mathrm{o}_a(u) \qquad \text{et} \qquad g = v + \mathrm{o}_a(v)\,.$$

    Donc, $f + g = (1+\lambda)u + \mathrm{o}_a(u)$ donc $f + g \underset{a}{\sim} (1+\lambda)u$
  - Si $u + v = 0$ alors on réécrit autrement $f + g$.

Exercice. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ dans les cas suivants :

1) $f(x) = (x^2 + x)\dfrac{\ln(1+x)}{\sin(3x)}$ au voisinage de 0
2) $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x} - \cos(2x)$ au voisinage de 0
3) $f(x) = \ln(1+3x) + \operatorname{Arctan}(2x)$ au voisinage de 0
4) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ au voisinage de $+\infty$
5) $f(x) = \ln(\sin x)$ au voisinage de 0
6) $f(x) = x^x - 1$ au voisinage de 0
7) $f(x) = \ln^2(x+1) - \ln^2(x)$ au voisinage de $+\infty$
8) $f(x) = (x^2 - 3x + 4)\ln(x)$ au voisinage de 1

Exercice. Calculer les limites suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{\sin(3x)(\sqrt{4+x} - 2)}{\cos(2x) - 1}$ au voisinage de 0
2) $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x^2)}{3x^2 + 5x}$ en 0 et en $+\infty$
3) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\operatorname{ch} x}\right)$ en $+\infty$
4) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$ en $+\infty$
5) $f(x) = \dfrac{\cos(3x)}{1 - 2\sin x}$ en $\frac{\pi}{6}$
6) $f(x) = (1 + \ln x)^{\tan(\frac{\pi}{2}x)}$ en 1
7) $f(x) = \left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$ en $+\infty$.

Théorème (Théorème des “gendarmes” : version équivalents)

Soit $(f,g,h,\varphi) \in (\mathbb{R}^I)^4$, $a \in \overline{I} \cup \{-\infty,+\infty\}$.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) & \text{au voisinage de } a \\ g(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x) \quad \text{et } h(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x) \end{cases} \qquad \text{alors} \quad f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$$

Exercice. Soit f une fonction vérifiant : $\forall x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{\sin x} - 1$.
Déterminer un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.