La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale :

- chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie
- chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément un théorème du cours avec ses hypothèses exactes ou en citant le numéro d'une question précédente du problème
- toute question amène une réponse qui doit être encadrée
- les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrase en français
- les notations de l'énoncé doivent être respectées
- les copies doivent être numérotées
- on peut sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que l'on admet les résultats non prouvés
- on peut traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Cette première partie du devoir est constituée de questions qui ont posé problème dans le DS2. Le but avoué est de vérifier que vous avez bien travaillé le corrigé du DS.

Exercice

1) Soit un entier $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{i\frac{\pi}{n}}$.

   Déterminer le module et un argument de $\dfrac{2}{1-z}$.

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\cos(n\theta) = \cos\theta$.

3) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $\forall \theta \in]0, 2\pi[$, $T_n(\theta) = \dfrac{e^{in\frac{\theta}{2}} \sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{2(n+1)\sin(\frac{\theta}{2})}$.

   Déterminer la limite de $T_n(\theta)$, lorsque θ tend vers zéro.

4) Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

   -a- Déterminer le domaine de définition de f et étudier la continuité de f sur son domaine de définition.

   -b- Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$.

   -c- Déterminer f'.

   -d- En déduire une expression simple de f.

La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale :

- chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie
- chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément un théorème du cours avec ses hypothèses exactes ou en citant le numéro d'une question précédente du problème
- toute question amène une réponse qui doit être encadrée
- les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrase en français
- les notations de l'énoncé doivent être respectées
- les copies doivent être numérotées
- on peut sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que l'on admet les résultats non prouvés
- on peut traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Exercice. Résolution d'une équation différentielle d'ordre 3

On note (E_1) l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

où y''' désigne la dérivée troisième de y.

On note $\mathbf{S}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles solutions de (E_1).

Lorsque l'on demande de "résoudre l'équation différentielle", on entend "déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ *et* <u>*à valeurs réelles*</u> *de l'équation différentielle".*

L'objectif des questions 1), 2) et 3) est de résoudre l'équation (E_1).

1) Déterminer les solutions de (E_1) de la forme $y : \ x \mapsto e^{rx}$ avec $r \in \mathbb{R}$. On obtiendra trois solutions qu'on notera y_1, y_2 et y_3.
2) On pose $\mathbf{F} = \left\{ay_1 + by_2 + cy_3/(a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$. Établir que $\mathbf{F} \subset \mathbf{S}$.
3) Le but des questions suivantes est de montrer l'inclusion $\mathbf{S} \subset \mathbf{F}$.

   -a- Soit y un élément de $\mathbf{S}$. On pose : $z = y'' - 5y' + 6y$.
   Montrer que z est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. On la note (E_2).

   -b- Résoudre l'équation différentielle (E_2).

   -c- Soit λ un nombre réel. Résoudre l'équation différentielle : $(E_3) \quad y'' - 5y' + 6y = \lambda \mathrm{e}^x$.

   -d- En déduire que $\mathbf{S} \subset \mathbf{F}$.
   Puis conclure sur la résolution de (E_1).
4) Résoudre l'équation différentielle : $(E_4) \quad y''' - 6y'' + 11y' - 6y = \sin x$.

Problème 1

Partie I - Résolution d'équations différentielles

1) Résoudre l'équation différentielle : $z' + z \operatorname{th} t = 0$, où z est une fonction de la variable réelle t à valeurs réelles.

   Trouver la solution z_1 de cette équation telle que $z_1(0) = 1$

2) Résoudre l'équation différentielle : $z' + z \operatorname{th} t = t \operatorname{th} t$.

   Trouver la solution z_2 de cette équation telle que $z_2(0) = 0$.

Partie II - Étude d'intégrales et de suites

Soient un réel x et k un entier strictement positif. On pose $I_k(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}$.

1) Calculer $I_1(x)$ (on pourra faire le changement de variable $u = e^t$).

2) Calculer $I_2(x)$.

3) -a- En intégrant par parties, trouver une relation entre I_{k+2} et I_k.
   Indication: écrire $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^k t} = \dfrac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch}^{k+1} t}$.

   -b- En déduire I_3 et I_4.

4) Démontrer que la fonction $I_k : x \mapsto I_k(x)$ est :

   -a- impaire.

   -b- de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   -c- monotone sur $\mathbb{R}$.

5) On se propose, pour k fixé, d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $u_n = I_k(n)$.

   -a- Démontrer que cette suite est monotone.

   -b- Démontrer que, pour tout réel t, $\dfrac{1}{\operatorname{ch} t} \leqslant 2e^{-t}$; en déduire que la suite converge.

6) On pose $J_k = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}$.

   -a- Calculer J_1 et J_2.

   -b- Trouver une relation entre J_{k+2} et J_k.

   -c- Donner une expression de J_k à l'aide de factorielles en distinguant les cas $k = 2p$ et $k = 2p + 1$ (plus difficile).

   Indication: pour $k = 2p + 1$ avec $p \geqslant 1$, écrire $J_{2p+1} = \displaystyle\prod_{l=0}^{p-1} \frac{J_{2l+3}}{J_{2l+1}} \times J_1$.