Exercice. Résolution d'une équation différentielle d'ordre 3

1) Posons $y:\ x\mapsto e^{rx}$ avec $r\in\mathbb{R}$, alors y est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y(x)=e^{rx}\qquad y'(x)=r\,\mathrm{e}^{rx}\qquad y''(x)=r^2\,\mathrm{e}^{rx}\qquad y'''(x)=r^3\,\mathrm{e}^{rx}\,.$$

Puis :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E_1) &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad (r^3-6r^2+11r-6)\,\mathrm{e}^{rx}=0\\ &\Leftrightarrow r^3-6r^2+11r-6=0\quad (\text{car } \mathrm{e}^{rx}\neq 0)\\ &\Leftrightarrow (r-1)(r^2-5r+6)=0\\ &\Leftrightarrow r=1 \text{ ou } r=2 \text{ ou } r=3. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On pose pour } k\in\{1,2,3\},\ y_k:x\mapsto \mathrm{e}^{kx} \text{ les solutions de } (E_1) \text{ recherchées}}$.

2) Posons $y=ay_1+by_2+cy_3\in\mathbf{F}$ où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{aligned} y'''-6y''+11y'-6y &= (ay_1+by_2+cy_3)'''-6(ay_1+by_2+cy_3)''+11(ay_1+by_2+cy_3)'-6(ay_1+by_2+cy_3)\\ &= a(y_1'''-6y_1''+11y_1'-6y_1)+b(y_2'''-6y_2''+11y_2'-6y_2)+c(y_3'''-6y_3''+11y_3'-6y_3)\\ &= 0 \qquad \text{car } y_1,\ y_2,\ y_2 \text{ solutions de } (E_1). \end{aligned}$$

Donc $y\in\mathbf{S}$.
On a donc prouvé $\boxed{\mathbf{F}\subset\mathbf{S}}$.

3) -a- Soit y un élément de $\mathbf{S}$. On pose : $z=y''-5y'+6y$.
Tout d'abord comme y est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, alors z est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$z'=y'''-5y''+6y'.$$

Donc

$$z'-z=y'''-5y''+6y'-(y''-5y'+6y)=y'''-6y''+11y'-6y=0\quad\text{donc}\quad \boxed{z'-z=0\quad (E_2)}.$$

-b- $\boxed{\text{L'ensemble-solution de } (E_2) \text{ est } \{x\mapsto\lambda\,\mathrm{e}^x\ /\ \lambda\in\mathbb{R}\}}$.

-c- Soit λ un nombre réel. On pose : $(E_3)\quad y''-5y'+6y=\lambda\mathrm{e}^x$.

- **Résolution de l'équation homogène**. On pose $(F_0)\quad y''-5y'+6y=0$.
  On pose (e) : $r^2-6r+5=0\Leftrightarrow r=2$ ou $r=3$..
  La solution générale de (F_0) est $x\mapsto\mu\,\mathrm{e}^{2x}+\nu\,\mathrm{e}^{3x}$ où $(\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2$.
- **Recherche d'une solution particulière**. 1 n'est pas solution de (e), on pose $y_p:x\mapsto\alpha\,\mathrm{e}^x$ où $\alpha\in\mathbb{R}$.
  y_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x\in\mathbb{R}$, $y_p(x)=y_p'(x)=y_p''(x)=\alpha\,\mathrm{e}^x$

$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } (E_3) &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad (\alpha-5\alpha+6\alpha)\,\mathrm{e}^x=\lambda\,\mathrm{e}^x\\ &\Leftrightarrow 2\alpha=\lambda\quad (\text{car } \forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^x\neq 0)\\ &\Leftrightarrow \alpha=\frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

  On pose donc $y_p:x\mapsto\dfrac{\lambda}{2}\,\mathrm{e}^x$.
- $\boxed{\text{L'ensemble-solution de } (E_3) \text{ est } \mathcal{S}_{(E_3)}=\left\{x\mapsto\mu\,\mathrm{e}^{2x}+\nu\,\mathrm{e}^{3x}+\frac{\lambda}{2}\,\mathrm{e}^x\ /\ (\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2\right\}=\left\{\frac{\lambda}{2}y_1+\mu y_2+\nu y_3\ /\ (\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2\right\}}$.

-d- On fait le bilan des questions 3)-a-, -b- et -c- où l'on a prouvé : $y\in\mathbf{S}\Rightarrow y\in\mathcal{S}_{(E_3)}$.
Puis on constate que $\mathcal{S}_{(E_3)}\subset\mathbf{F}$.
Ce qui prouve finalement $\boxed{\mathbf{S}\subset\mathbf{F}}$.
Avec l'autre inclusion prouvée dans 2) il vient $\boxed{\mathbf{S}=\mathbf{F}}$.

4)

5) On pose : $(E_4)\quad y'''-6y''+11y'-6y=\sin x$. Remarquons tout d'abord que $\varphi=-\dfrac{1}{10}\cos$ est une solution de (E_4), en effet :

$$\varphi'''-6\varphi''+11\varphi'-6\varphi=-\frac{1}{10}(\sin+6\cos-11\sin-6\cos)=\sin.$$

Puis, soit y une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E_4) &\Leftrightarrow y''' - 6y'' + 11y' - 6y = \sin \\ &\Leftrightarrow y''' - 6y'' + 11y' - 6y = \varphi''' - 6\varphi'' + 11\varphi' - 6\varphi \qquad (\text{car } \varphi \text{ solution de } (E_4)) \\ &\Leftrightarrow (y-\varphi)''' - 6(y-\varphi)'' + 11(y-\varphi)' - 6(y-\varphi) = 0 \\ &\Leftrightarrow y - \varphi \text{ solution de } (E_1) \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y - \varphi = ay_1 + by_2 + cy_3 \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = \varphi + ay_1 + by_2 + cy_3. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{\text{l'ensemble-solution de } (E_4) \text{ est } \left\{-\frac{1}{10}\sin + ay_1 + by_2 + cy_3 \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}}$.

PROBLÈME

I. Résolution d'équations différentielles

1) On pose $(H) : z' + z \operatorname{th} t = 0$.
On pose $a : t \mapsto \operatorname{th}(t) = \dfrac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)}$ et $A : t \mapsto \ln|\operatorname{ch}(t)| = \ln(\operatorname{ch}(t))$ ($\operatorname{ch} > 0$) une primitive de a sur $\mathbb{R}$.
Alors : z solution de (H) sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \ z(t) = \lambda e^{-\ln(\operatorname{ch} t)} = \dfrac{\lambda}{\operatorname{ch} t}$.
Donc $\boxed{\text{l'ensemble-solution de } (H) \text{ est } \left\{t \mapsto \frac{\lambda}{\operatorname{ch} t} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$.
Or $z_1(0) = 1 \iff \lambda = 1$, d'où $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \ z_1(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t}.}$

2) On pose $(E) : z' + z \operatorname{th} t = t \operatorname{th}(t)$.
L'équation homogène a déjà été résolue au I-1).
<u>Solution particulière :</u> procédons par la méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de la forme $z_0 : t \mapsto \dfrac{K(t)}{\operatorname{ch}(t)}$, où K est une fonction supposée dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z_0 \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall \ t \in \mathbb{R}, \quad z_0'(t) + z_0(t) \operatorname{th}(t) = t \operatorname{th}(t) \\ &\Leftrightarrow \forall \ t \in \mathbb{R}, \quad \frac{K'(t)}{\operatorname{ch}(t)} - K(t)\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2 t} + \frac{K(t)}{\operatorname{ch}(t)}\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} = \operatorname{th}(t) \\ &\Leftrightarrow K'(t) = t \operatorname{sh}(t). \end{aligned}$$

Procédons par intégration par parties pour déterminer une primitive de $t \mapsto t \operatorname{sh}(t)$.
Posons $\forall \ s \in \mathbb{R}$, $u'(s) = \operatorname{sh}(s)$, $v(s) = s$, $u(s) = \operatorname{ch}(s)$ et $v'(s) = 1$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\int^t s \operatorname{sh}(s) \, \mathrm{d}s = t \operatorname{ch}(t) - \int^t \operatorname{ch}(s) \ ds$$

On choisit $K(t) = t \operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t)$.
Nous obtenons que $z \mapsto t - \operatorname{th}(t)$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.
Donc $\boxed{\text{l'ensemble-solution de } (E) \text{ est } \left\{t \mapsto t - \operatorname{th}(t) + \frac{\lambda}{\operatorname{ch} t} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$.
Enfin, $z_2(0) = 0 \iff \lambda = 0$, d'où $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \ z_2(t) = t - \operatorname{th} t.}$

II. Étude d'intégrales et de suites

Soit $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

1) Changement de variable $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$ $u = e^t$ donne $du = e^t \ dt$ et
$I_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2}{e^t + e^{-t}} \ dt = 2\int_0^x \frac{e^t}{e^{2t}+1} \ dt = \int_1^{e^x} \frac{1}{1+u^2} \ du = 2\left[\operatorname{Arctan} u\right]_1^{e^x}$
d'où $\boxed{I_1(x) = 2\operatorname{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}.}$

2) $I_2(x) \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = [\operatorname{th} t]_0^x$
$\boxed{I_2(x) = \operatorname{th} x.}$

3) -a- $I_k(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch}^{k+1} t}\,dt$

Procédons par intégration par parties et posons :

$$\begin{array}{ll} u(t)=(\operatorname{ch} t)^{-(k+1)} & u'(t)=-(k+1)\operatorname{sh} t(\operatorname{ch} t)^{-k-2} \\ v'(t)=\operatorname{ch} t & v(t)=\operatorname{sh} t \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$.

Il vient alors :

$$I_k(x)=\left[\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^{k+1} t}\right]_0^x+(k+1)\int_0^x \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^{k+2} t}\,dt=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x}+(k+1)\int_0^x \frac{\operatorname{ch}^2 t-1}{\operatorname{ch}^{k+2} t}\,dt$$

$$I_k(x)=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x}+(k+1)\left(\int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}^k t}\,dt-\int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}^{k+2} t}\,dt\right)=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x}+(k+1)\left(I_k(x)-I_{k+2}(x)\right)$$

d'où $\boxed{(k+1)I_{k+2}(x)=kI_k(x)+\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x}.}$

-b- Pour $k=1$, $2I_3(x)=I_1(x)+\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$ soit $\boxed{I_3(x)=\operatorname{Arctan}(e^x)-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x}}$

Pour $k=2$, $3I_4(x)=2I_2(x)+\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x}$ soit $\boxed{I_4(x)=\dfrac{2}{3}\operatorname{th} x+\dfrac{\operatorname{sh} x}{3\operatorname{ch}^3 x}}$

4) -a- $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $I_k(-x)=\displaystyle\int_0^{-x}\frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}$. Le changement de variable affine $u=-t$ donne

$$I_k(-x)=\int_0^x \frac{-du}{\operatorname{ch}^k(-u)}=-\int_0^x\frac{du}{\operatorname{ch}^k u}=-I_k(x)$$

ce qui montre que $\boxed{I_k \textbf{ est impaire.}}$

-b- $t\mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^k t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc I_k est une primitive de $t\mapsto\dfrac{1}{\operatorname{ch}^k t}$ sur $\mathbb{R}$, I_k est donc dérivable avec

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad I_k'(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}^k x}.$$

Donc I_k' est continue sur $\mathbb{R}$, et $\boxed{I_k \text{ est donc bien de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

-c- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $I_k'(x)=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^k x}>0$ on en déduit que $\boxed{I_k \textbf{ est une fonction strictement croissante.}}$

5) -a- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $n<n+1$ et I_k est strictement croissante donc $I_k(n)<I_k(n+1)$ c'est-à-dire $u_n<u_{n+1}$.

$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 1} \textbf{ est donc strictement croissante.}}$

-b- Soit $t\in\mathbb{R}$, $0<e^t+0<e^t+e^{-t}$ donc $\dfrac{1}{e^t+e^{-t}}<\dfrac{1}{e^t+0}$

De plus, $2>0$ donc $\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}=\dfrac{2}{e^t+e^{-t}}<\dfrac{2}{e^t+0}$ On obtient bien $\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}\leqslant 2e^{-t}$.

On intègre bornes croissantes $n>0$,

$$\begin{aligned} u_n &\leqslant 2^k\int_0^n e^{-kt}\,dt \\ &\leqslant 2^k\left[-\frac{e^{-kt}}{k}\right]_0^n \\ &\leqslant \frac{2^k}{k}\left(1-e^{-kn}\right) \\ &\leqslant \frac{2^k}{k} \end{aligned}$$

$(u_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée. D'après le II-5)-a, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 1}\textbf{, croissante et majorée, est donc convergente.}}$

6) -a- Il suffit de prendre la limite en $+\infty$ des expressions obtenues au II-1) et au II-2)

$$\boxed{J_1=2\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2} \text{ et } J_2=1.}$$

-b- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après le II-3.a), $I_{k+2}(n)=\dfrac{k}{k+1}I_k(n)+\dfrac{\operatorname{sh} n}{(k+1)\operatorname{ch}^{k+1} n}$.

$\dfrac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch}^{k+1} n}=\dfrac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch} n}\times\dfrac{1}{\operatorname{ch}^k n}$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch} n}=1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\operatorname{ch} n=+\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch}^{k+1} n}=0$.

On peut conclure $\boxed{J_{k+2}=\dfrac{k}{k+1}J_k.}$

-c- Disjonction des cas.

Si k impair, $k = 2p+1$

Pour $p \geqslant 1$, à l'aide d'un produit téléscopique, on obtient,

$$J_{2p+1} = \prod_{l=0}^{p-1} \frac{J_{2l+3}}{J_{2l+1}} \times J_1$$

Avec le II-6)-b,

$$J_{2p+1} = \prod_{l=0}^{p-1} \frac{2l+1}{2l+2}.J_1 = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p)} \times \frac{\pi}{2}$$

On pouvait également obtenir ce résultat avec une récurrence.

On simplifie $J_{2p+1} = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (2p-1) \times (2p)}{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p))^2} \times \dfrac{\pi}{2}$

$$\boxed{J_{2p+1} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}.}$$

Ce résultat reste valable pour $p = 0$.

Si k pair, $k = 2p$

On obtient par une méthode similaire, après calculs

$$\boxed{J_{2p} = \frac{2^{2p-2}\left[(p-1)!\right]^2}{(2p-1)!}.}$$