La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale :

- chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie
- chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément un théorème du cours avec ses hypothèses exactes ou en citant le numéro d'une question précédente du problème
- toute question amène une réponse qui doit être encadrée
- les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrase en français
- les notations de l'énoncé doivent être respectées
- les copies doivent être numérotées
- on peut sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que l'on admet les résultats non prouvés
- on peut traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Exercice

Le but de l'exercice est de déterminer les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, non identiquement nulles, s'annulant en au moins un point et telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

1) Soit f une solution. Montrer que f est paire, puis qu'elle admet une primitive F impaire.

2) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x+y) + F(x-y) = 2F(x)f(y)$.

3) En utilisant la relation obtenue au 2 et le fait que f n'est pas identiquement nulle, montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

4) En utilisant la relation obtenue au 2, montrer qu'il existe μ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, F''(x) = \mu F(x)$.

5) Achever la résolution de l'exercice (on fera une disjonction des cas selon le signe de μ).

Exercice

1) Prenons $x = y = 0$. On obtient $2f(0) = 2f(0)^2$ c'est-à-dire $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) = 1$ ou $f(0) = 0$.

   Si $f(0) = 0$ alors $\forall x, 2f(x) = f(x)f(0) = 0$. f est la fonction nulle. C'est faux, donc $f(0) = 1$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(0+x) + f(0-x) = 2f(x)f(0) = 2f(x)$ donc $f(-x) = f(x)$. $\boxed{f \text{ est bien paire.}}$

   f est continue sur $\mathbb{R}$. Notons F la primitive de f s'annulant en 0.

   Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t &= F(x)\\ &= \int_0^x f(-t)\mathrm{d}t\\ &= -\int_0^x -f(-t)\mathrm{d}t = -[F(-t)]_0^x\\ &= -F(-x)\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{F \text{ est bien impaire.}}$ On aurait pu procéder avec le changement de variables $u = -t$.

2) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   Pour tout $t \in [0, x]$,

$$f(t+y) + f(t-y) = 2f(t)f(y)$$

   On intègre en t sur $[0, x]$ (les intégrales existent car f est continue).

$$\begin{aligned}&\int_0^x f(t+y)\mathrm{d}t + \int_0^x f(t-y)\mathrm{d}t = \int_0^x 2f(y)f(t)\mathrm{d}t\\ &[F(t+y)]_0^x + [F(t-y)]_0^x = 2f(y)F(t)\\ &F(x+y) - F(y) + F(x-y) - F(-y) = 2f(y)F(x)\\ &\boxed{F(x+y) + F(x-y) = 2f(y)F(x)} \text{ car } F \text{ est impaire } F(y) + F(-y) = 0\end{aligned}$$

3) f n'est pas identiquement nulle donc F non plus donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $F(x_0) \neq 0$, et ainsi avec la relation du 2

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \frac{F(x_0+y) + F(x_0-y)}{2F(x_0)} = f(y)$$

   F est dérivable sur $\mathbb{R}$, à l'aide de la relation fonctionnelle juste établie, on a que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   $F' = f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Avec la relation fonctionnelle, on a alors que $\boxed{f \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}.}$

4) F et f sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

   On dérive deux fois la relation du 2 en y.

   Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}F(x+y) + F(x-y) &= 2F(x)f(y)\\ F'(x+y) - F'(x-y) &= 2F(x)f'(y)\\ F''(x+y) + F''(x-y) &= 2F(x)f''(y)\end{aligned}$$

   Avec $y = 0$, on a $2F''(x) = 2F(x)f''(0)$. On a bien $\boxed{F''(x) = \mu F(x)}$ avec $\mu = f''(0)$.

5) Considérons $(E) : F''(x) - \mu F(x) = 0$

   <u>1</u>

   1er cas : $\mu = 0$:

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F''(x) = 0$ donc $f'(x) = 0$. f est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

   $f(0) = 1$ donc $f = 1$, or f s'annule au moins une fois. C'est impossible.

   2e cas : $\mu > 0$

On peut écrire $\mu = a^2$ avec $a > 0$.

$(E) \Leftrightarrow F'' - a^2 F = 0$

Equation caractéristique (C) $r^2 - a^2 = 0$ deux solitions distinctes a et $-a$.

Il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = c_1 \exp(ax) + c_2 \exp(-ax)$.

$F(0) = 0$ donc $c_1 + c_2 = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 2c_1 \operatorname{sh}(ax)$. Ensuite $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = F'(x) = 2c_1 a \operatorname{ch}(ax)$ et $f(0) = 1$ donc $2c_1 a = 1$ donc $f(x) = \operatorname{ch}(ax)$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 1 > 0$. f ne s'annule pas. C'est impossible.

<u>3e cas :</u> $\mu < 0$

On peut écrire $\mu = (ai)^2$ avec $a > 0$.

Il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax)$, de même $F(0) = 0$ donc $c_1 = 0$ et $F'(x) = c_2 a \cos(ax) = f(x)$, $f(0) = 1$ donc $ac_2 = 1$, donc $f(x) = \cos(ax)$.

Ainsi $f:\ x \mapsto \cos(ax)$ avec $a > 0$.

Réciproquement soit $f:\ x \mapsto \cos(ax)$ avec $a > 0$.

f est continue sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, $f\left(\dfrac{\pi}{2a}\right) = 0$.

On montre que l'équation est vérifiée en utilisant les formules $\cos(a+b) = \cdots$ et $\cos(a-b) = \cdots$

$\boxed{\text{Les solutions de l'exercice sont donc les fonctions } f:\ x \mapsto \cos(ax) \text{ avec } a > 0.}$