Exercice 1 On pose $I = \displaystyle\int_{-1}^{2} \sqrt{-x^2+x+2}\,\mathrm{d}x$.

Les racines de $-x^2+x+2$ sont -1 et 2 donc sur $[-1,2]$, $x \mapsto -x^2+x+2$ est positif (signe entre les racines) et continue, or $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc par composition $x \mapsto \sqrt{-x^2+x+2}$ est continue sur $[-1,2]$. Donc $\boxed{J \text{ existe bien}}$.

Puis: $\quad -x^2+x+2 = -(x^2-x-2) = -\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2\right) = \frac{9}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2$. D'où

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{2} \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\int_{-1}^{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\int_{-1}^{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2x-1}{3}\right)^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On pose $u = \dfrac{2x-1}{3}$ donc $\mathrm{d}u = \dfrac{2}{3}\mathrm{d}x$ d'où $\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}\mathrm{d}u$,

$$I = \frac{9}{4}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

On pose $u = \cos t$ alors $\mathrm{d}u = -\sin t\,\mathrm{d}t$, d'où

$$\begin{aligned}
I &= \frac{9}{4}\int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}(-\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{9}{4}\int_{0}^{\pi} |\sin t| \sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{9}{4}\int_{0}^{\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t \qquad (\sin t \geqslant 0 \text{ car } t \in [0,\pi]) \\
&= \frac{9}{4}\int_{0}^{\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{9}{4}\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi} \\
&\boxed{I = \frac{9\pi}{8}}.
\end{aligned}$$

Exercice 2 On pose $f : x \mapsto \dfrac{\cos x - 1}{\tan x}$.

1) -a- tan est défini sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/ k \in \mathbb{Z}\}$ et s'annule en $k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ donc $\boxed{f \text{ est défini sur } \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} \,/ k \in \mathbb{Z}\}}$.

L'ensemble de définition peut aussi être noté : $\boxed{\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\right[}$.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} \,/ k \in \mathbb{Z}\}$,

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)-1}{\tan(-x)} = -\frac{\cos(x)-1}{\tan x} = -f(x) \quad \text{donc} \quad \boxed{f \text{ est impaire.}}$$

-b- **Limite en** 0. Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$f(x) = \frac{\frac{\cos x - 1}{x}}{\frac{\tan x}{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{\cos'(0)}{\tan'(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Donc $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$.

Limite en $\frac{\pi}{2}$. Par opérations sur les limites, $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0}$.

-c- On prolonge donc f par continuité en 0 et en $\frac{\pi}{2}$ en posant $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$.
Dérivabilité en 0. Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\frac{f(x)-f(0}{x-0} = \frac{\cos x - 1}{x \tan x} = \frac{\frac{\cos x - 1}{x^2}}{\frac{\tan x}{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} \qquad \text{(limites usuelles).}$$

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ avec } f'(0) = -\frac{1}{2}}$.

Dérivabilité en $\frac{\pi}{2}$. Pour h au voisinage de 0,

$$\frac{f(\frac{\pi}{2}+h) - f(\frac{\pi}{2})}{h} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+h) - 1}{h\tan(\frac{\pi}{2}+h)} = \frac{-\sin h - 1}{-h\frac{1}{\tan h}} = \frac{\tan h(1+\sin h))}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1$$

par produit de limites où l'on a utilisé la limite usuelle $\frac{\tan h}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1$.

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } \frac{\pi}{2} \text{ avec } f'(\frac{\pi}{2}) = 1}$.

-d- Comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, f est dérivable sur $D = \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ et pour $x \in D$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin x \tan x - (\cos x - 1)\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} = \frac{-\sin x \frac{\sin x}{\cos x} - (\cos x - 1)\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \\ &= \frac{-\sin^2 x \cos x - (\cos x - 1)}{\sin^2 x} = \frac{(\cos^2 x - 1)\cos x - (\cos x - 1)}{\sin^2 x} \\ & \boxed{f'(x) = \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x - 1)}{\sin^2 x}}. \end{aligned}$$

-e- Par imparité de f et d'après le prolongement réalisé en $\frac{\pi}{2}$, la fonction f est aussi prolongeable par continuité en $-\frac{\pi}{2}$ en posant $f(-\frac{\pi}{2}) = 0$, le prolongement ainsi obtenue est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ avec $f'(\frac{\pi}{2}) = -1$.

$\boxed{\text{Si on note } \widetilde{f} \text{ la fonction ainsi prolongée, elle est bien dérivable sur }]-\pi, \pi[\text{ et sa restriction à } D \text{ est } f}$.

2) On calcule $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On pose $t = \cos x$ alors $\mathrm{d}t = -\sin x \,\mathrm{d}x$ et $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \to t = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} \to t = \frac{1}{2} \end{cases}$,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos x - 1)(-\sin x)\,\mathrm{d}x}{\frac{-\sin^2 x}{\cos x}} \mathrm{d}x \\ &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(t-1)\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2-1}{t}} \quad \text{(on a utilisé } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2\text{)} \\ &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{t+1} \mathrm{d}t \\ &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) \mathrm{d}t \\ &= [t - \ln|t+1|]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) \\ & \boxed{I = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3}\right)}. \end{aligned}$$

3) On considère l'équation différentielle : $\quad (E) \quad y'(x) + \dfrac{2}{\sin(2x)} y(x) = -\cos x \quad$ où $\quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

-a- Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on calcule $\displaystyle\int^x \frac{2}{\sin(2t)} \mathrm{d}t = \int^x \frac{1}{\sin(t)\cos t} \mathrm{d}t$ en posant $s = \tan t$ alors $\mathrm{d}s = \frac{1}{\cos^2 t} \mathrm{d}t$, donc

$$\begin{aligned} \int^x \frac{2}{\sin(2t)} \mathrm{d}t &= \int^x \frac{\cos t}{\sin(t)} \frac{1}{\cos^2 t} \mathrm{d}t \\ &= \int^{\tan x} \frac{1}{s} \mathrm{d}s \\ &= \ln|\tan x| + C \text{ où } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Or $\tan x > 0$ pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\boxed{\text{une primitive de } x \mapsto \dfrac{2}{\sin(2x)} \text{ sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ est donc } x \mapsto \ln(\tan x)}$.

-b- La solution générale de l'équation homogène associée à (E) sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ est donc :

$$\boxed{x \mapsto \lambda \,\mathrm{e}^{-\ln(\tan x)} = \frac{\lambda}{\tan x} \qquad \text{où} \qquad \lambda \in \mathbb{R}}.$$

-c- Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on utilise le calcul de $f'(x)$ de 1)-d-

$$\begin{aligned}
f'(x) + \frac{2}{\sin(2x)} f(x) &= \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x - 1)}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x \cos x} \frac{\cos x - 1}{\tan x} \\
&= \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x - 1) + (\cos x - 1)}{\sin^2 x} \\
&= \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x)}{\sin^2 x} \\
&= \frac{\cos x(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{\sin^2 x} \\
&= -\cos x \quad \text{(on a utilisé } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x))
\end{aligned}$$

donc $\boxed{f \text{ est solution particulière de } (E)}$.

-d- On détermine une solution particulière par la méthode de variation de la constante.
Posons, pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{\tan x}$ où λ est supposée dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Alors, pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{\tan x} \qquad y_p'(x) = \frac{\lambda'(x)}{\tan x} - \lambda(x) \frac{1}{\tan^2 x \cos^2 x} = \frac{\lambda'(x)}{\tan x} - \lambda(x) \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Et donc :

$$y_p'(x) + \frac{2}{\sin(2x)} y_p(x) = \frac{\lambda'(x)}{\tan x}.$$

On en déduit

$$y_p \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \lambda'(x) = -\cos x \tan x = -\sin x.$$

On pose alors $\lambda : x \mapsto \cos x$ et donc $\boxed{y_p : x \mapsto \frac{\cos x}{\tan x} \text{ est solution particulière de } (E)}$.

-e- D'après 3)-b- et 3)-c- on déduit :

$$\boxed{\text{l'ensemble-solution de } (E), \left\{ \begin{array}{ccc} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\lambda}{\cos x} + f(x) \end{array} \ / \, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}.$$

-f- On souhaite l'équation différentielle : $(F) \quad \sin(2x)y'(x) + 2y(x) = -\cos x \sin(2x)$ sur $]-\pi, \pi[$.
Sur chaque intervalle $I_1 =]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$, $I_2 =]-\frac{\pi}{2}, 0[$, $I_3 =]0, \frac{\pi}{2}[$, $I_4 =]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $x \mapsto \sin(2x)$ ne s'annule pas, l'équation se réécrit sous la forme :

$$y'(x) + \frac{2}{\sin(2x)} y(x) = -\cos x.$$

Par une résolution similaire à 3)-d-, la solution générale de (F) sur chaque (E_i) est :

$$y_i : x \mapsto \frac{\lambda_i}{\tan x} + \widetilde{f}(x)$$

où les λ_i sont réels. On souhaite raccorder les solutions.
Par continuité.
En $-\frac{\pi}{2}$. Comme $\tan x \underset{x \to -\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} \pm\infty$ et $\widetilde{f}(-\frac{\pi}{2}) = 0$, on a $\lim\limits_{-\frac{\pi}{2}_-} y_1 = 0$ et $\lim\limits_{-\frac{\pi}{2}_+} y_2 = 0$. Les limites sont finies et égales et on prolonge y_1 et y_2 en posant $y_1(-\frac{\pi}{2}) = y_2(-\frac{\pi}{2}) = 0$.
En $\frac{\pi}{2}$. De même $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}_-} y_3 = \lim\limits_{\frac{\pi}{2}_+} y_4 = 0$. Les limites sont finies et égales et on prolonge y_3 et y_4 en posant $y_3(\frac{\pi}{2}) = y_4(\frac{\pi}{2}) = 0$.
En 0. Comme $\tan x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, $\frac{\lambda_2}{\tan x}$ et $\frac{\lambda_3}{\tan x}$ n'admettent une limite finie que si $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ dans ce cas comme $\widetilde{f}(0) = 0$ on a, $\lim\limits_{0-} y_2 = \lim\limits_{0_+} y_3 = 0$. Les limites sont finies et égales et on prolonge y_2 et y_3 en posant $y_2(0) = y_3(0) = 0$.
Par dérivabilité (désormais $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$).
En $\frac{\pi}{2}$. Pour $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$,

$$\frac{\frac{\lambda_4}{\tan(\frac{\pi}{2}+h)-0}}{h} = \frac{-\lambda_4 \tan h}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} -\lambda_4.$$

Et donc en utilisant $\widetilde{f}'(\frac{\pi}{2}) = 1$:

$$\frac{y_4(\frac{\pi}{2} + h) - y_4(\frac{\pi}{2})}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} -\lambda_4 + 1.$$

Or comme $\lambda_3 = 0$, alors $y_3 = \widetilde{f}$, de plus $\widetilde{f}'(\frac{\pi}{2}) = 1$ donc

$$\frac{y_3(\frac{\pi}{2} + h) - y_3(\frac{\pi}{2})}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 1.$$

Les limites existent sont finies et égales si et seulement si $\lambda_4 = 0$.
En $-\frac{\pi}{2}$. On obtient $\lambda_1 = 0$.
Equation vérifiée en $-\frac{\pi}{2}$, 0 et $\frac{\pi}{2}$.

On vérifie facilement qu'avec $\widetilde{f}(-\frac{\pi}{2}) = 0$, $\widetilde{f}(0) = 0$, $\widetilde{f}(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\widetilde{f}'(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\widetilde{f}'(0) = 0$, $\widetilde{f}'(\frac{\pi}{2}) = 1$ l'équation est vérifiée par $\widetilde{f}$ en ces trois valeurs.

Conclusion : $\boxed{\text{l'unique solution de } (F) \text{ sur }]-\pi,\pi[\text{ est } \widetilde{f}}$.

Exercice 3 Soit $x_0 \in I$ et f_λ l'unique solution de l'équation $(E) : y' + ay = b$ vérifiant $f_\lambda(x_0) = \lambda$.
L'équation de la tangente T_λ est :

$$y = f_\lambda'(x_0)(x - x_0) + f_\lambda(x_0).$$

Comme f_λ est solution de (E) il vient

$$f_\lambda'(x_0) + a(x_0)f_\lambda(x_0) = b(x_0) \text{ donc } f_\lambda'(x_0) = b(x_0) - \lambda a(x_0).$$

L'équation de la tangente T_λ se réécrit alors :

$$y = (b(x_0) - \lambda a(x_0))(x - x_0) + \lambda.$$

Le coefficient de directeur de T_λ est $(b(x_0) - \lambda a(x_0))$.

- Si $a(x_0) = 0$ toutes les tangentes T_λ ont même coefficient directeur $b(x_0)$, elles sont donc toutes parallèles.
- Si $a(x_0) \neq 0$, montrons que les tangentes se coupent en un même point commun.
  Déterminons le point d'intersection de T_λ et T_0 (par exemple) où $\lambda \neq 0$, en résolvant le système :

$$\begin{cases} y = b(x_0)(x - x_0) \\ y = (b(x_0) - a(x_0)\lambda)(x - x_0) + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = b(x_0)(x - x_0) \\ \lambda a(x_0)(x - x_0) - \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \frac{1}{a(x_0)} \\ y = \frac{b(x_0)}{a(x_0)} \end{cases}.$$

Le point de coordonnées $\left(x_0 + \dfrac{1}{a(x_0)}, \dfrac{b(x_0)}{a(x_0)}\right)$, qui est bien indépendant de λ, appartient donc à toutes les droites T_λ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Conclusion : $\boxed{\text{les droites } T_\lambda \text{ (où } \lambda \text{ décrit } \mathbb{R}) \text{ sont soit toutes parallèles, soit possèdent un point commun}}$.