

Les réponses aux questions doivent être soigneusement justifiées. La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale. Les **résultats** doivent être mis en évidence, **encadrés**. Vous pouvez sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que vous admettez les résultats non prouvés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Exercice 1. Théorème de Cesaro et applications

Pour toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ on note $a_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$ la moyenne arithmétique de ses n premiers termes. Le but des questions 1) et 2) est de prouver le **théorème de Cesaro** qui affirme que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge aussi vers l .

Dans un premier temps, si cela vous semble compliqué vous pouvez admettre le résultat de la première question et continuer la suite.

1) On suppose d'abord $l = 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

-a- Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0$ on a $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

-b- Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_1$ on a: $\frac{|u_1| + |u_2| + \dots + |u_{N_0}|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

-c- Dédurre que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2) Traiter le cas $l \in \mathbb{R}$ en utilisant ce qui précède. [Il pourra être judicieux d'étudier $a_n - l$]

Dans la suite on donne quelques applications du théorème de Cesaro.

3) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la suite $(v_{n+1} - v_n)_n$ converge vers l . Montrer que la suite $\left(\frac{v_n}{n}\right)_n$ converge également vers l .

4) Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la suite $\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right)_n$ converge vers l où $l > 0$. Montrer que $(\sqrt[n]{w_n})_n$ converge également vers l . On admet que résultat reste vrai si $l = 0$.

5) **Application:** déterminer les limites éventuelles des suites de terme général:

-a- $u_n = \sqrt[n]{n}$

-b- $u_n = \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$

-c- $u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Exercice 2 Soit u la suite définie par: $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$.

1) Montrer que la suite u est bien définie et à valeurs dans $[1, +\infty[$.

2) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ puis montrer que: $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{k+1} - u_k \leq \frac{1}{2^{k+1}}$.

3) En déduire que la suite u est majorée par 2. Puis que la suite est convergente.

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en calculant $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2)$ de deux façons, trouver une expression de u_n en fonction de n .

5) Montrer alors que la suite u est convergente et déterminer sa limite que l'on notera l .

6) Déterminer un équivalent simple de $u_n - l$.

Exercice 3. Facultatif

Soit u une suite de nombres réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+3}.$$

Démontrer que u est convergente si et seulement si u est majorée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) = 0$.