Exercice 1 $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = x + \cos x \quad (E)$.

NB: il faut rédiger correctement les résolutions d'équations différentielles, comme dans le cours, comme dans ce corrigé. Ne pas confondre fonction et expression notamment.

1) Résolution de (E_1) : $y'' - y = x$.

- L'équation caractéristique est: $r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 1$.
D'où la solution générale de l'équation homogène: $x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^x + \mu\,\mathrm{e}^{-x}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- On remarque que $x \mapsto -x$ est solution particulière de (E_1).
- D'où $\boxed{\text{l'ensemble-solution de } (E_1),\ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\,\mathrm{e}^x + \mu\,\mathrm{e}^{-x} - x \end{array} \ / \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$.

2) Résolution de (E_2) : $y'' + y = \cos(x)$.

- L'équation caractéristique est: $r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm\,\mathrm{i}$.
D'où la solution générale de l'équation homogène: $x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- On a $\cos x = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x})$. On pose (E_3) : $y'' + y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$. i est solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de (E_3) sous la forme $z_p : x \mapsto ax\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ où $a \in \mathbb{C}$. Alors $\begin{cases} z_p(x) = ax\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \\ z_p'(x) = (\mathrm{i}\,ax + a)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \\ z_p''(x) = (-ax + 2\,\mathrm{i}\,a)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \end{cases}$, donc

$$z_p \text{ est solution de } (E_3) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad z_p''(x) + z_p(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\,\mathrm{i}\,a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \Leftrightarrow 2\,\mathrm{i}\,a = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{\mathrm{i}}{2}.$$

D'où $z_p : x \mapsto -\frac{\mathrm{i}\,x}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$, on pose $y_p = \mathrm{Re}\,(z_p)$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p(x) = \mathrm{Re}\left(-\frac{\mathrm{i}\,x}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\right) = \mathrm{Re}\left(-\frac{\mathrm{i}\,x}{2}(\cos x + \mathrm{i}\sin x)\right) = \frac{x \sin x}{2}.$$

- D'où $\boxed{\text{l'ensemble-solution de } (E_2),\ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{x\sin x}{2} \end{array} \ / \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$.

3) **Analyse**. Soit f une solution de (E). On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

-a- $x \mapsto -x$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composition $x \mapsto f(-x)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc par combinaison linéaire, g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{f'(x) - f'(-x)}{2} \qquad g''(x) = \frac{f''(x) + f''(-x)}{2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme f est solution de (E):

$$f''(x) + f(-x) = x + \cos x \qquad \text{et} \qquad f''(-x) + f(x) = -x + \cos(-x) = -x + \cos x. \quad (*)$$

Donc

$$g''(x) + g(x) = \frac{f''(x) + f(-x)}{2} + \frac{f''(-x) + f(x)}{2} = \frac{1}{2}\left((x + \cos x) + (-x + \cos x)\right) = \cos x.$$

Finalement $\boxed{g \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle } (E_2)\text{: } y'' + y = \cos x}$.

$\boxed{\text{Posons alors } (\lambda_1, \mu_1) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que pour tout } x \in \mathbb{R},\ g(x) = \lambda_1 \cos x + \mu_1 \sin x + \frac{x \sin x}{2}}$.

NB: il ne fallait pas oublier de prouver que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

-b- Comme pour g, h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad h''(x) = \frac{f''(x) - f''(-x)}{2}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, en réutilisant $(*)$ de 3)-a-,

$$h''(x) - h(x) = \frac{f''(x) + f(-x)}{2} - \frac{f''(-x) + f''(x)}{2} = \frac{1}{2}\left((x + \cos x) - (-x + \cos x)\right) = x.$$

Finalement $\boxed{h \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle } (E_1)\text{: } y'' - y = x}$

$\boxed{\text{Posons alors } (\lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que pour tout } x \in \mathbb{R},\ h(x) = \lambda_2\,\mathrm{e}^x + \mu_2\,\mathrm{e}^{-x} - x}$.

-c- Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + h(x)$.

Donc $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda_1 \cos x + \mu_1 \sin x + \frac{x \sin x}{2} + \lambda_2\,\mathrm{e}^x + \mu_2\,\mathrm{e}^{-x} - x}$.

4) **Synthèse**. On détermine parmi les f précédents celles qui sont effectivement solutions de (E). Soit $(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ et $f : x \mapsto \lambda_1 \cos x + \mu_1 \sin x + \dfrac{x \sin x}{2} + \lambda_2\,\mathrm{e}^x + \mu_2\,\mathrm{e}^{-x} - x$. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = -\lambda_1 \cos x - \mu_1 \sin x + \cos x - \frac{x \sin x}{2} + \lambda_2 \,\mathrm{e}^x + \mu_2 \,\mathrm{e}^{-x}$$

$$f(-x) = \lambda_1 \cos(-x) + \mu_1 \sin(-x) + \frac{-x\sin(-x)}{2} + \lambda_2 \,\mathrm{e}^{-x} + \mu_2 \,\mathrm{e}^{x} + x = \lambda_1 \cos x - \mu_1 \sin x + \frac{x \sin x}{2} + \lambda_2 \,\mathrm{e}^{-x} + \mu_2 \,\mathrm{e}^{x} + x.$$

D'où:

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = x \cos x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -2\mu_1 \sin x + \lambda_2(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + \mu_2(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x) + x + \cos x = x + \cos x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -2\mu_1 \sin x + 2(\lambda_2 + \mu_2) \operatorname{ch} x = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\mu_1 = 0 \\ \lambda_2 + \mu_2 = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

En effet pour l'implication $\Rightarrow$, on prend des valeurs particulières de x. Pour $x = 0$, il vient $2(\lambda_2 + \mu_2) \operatorname{ch} 0 = 0$ c'est-à-dire $\lambda_2 + \mu_2 = 0$. Puis avec $x = \frac{\pi}{2}$, il vient $\mu_1 = 0$. Puis, l'implication $\Leftarrow$ est triviale.

NB: cette dernière équivalence a été le plus souvent saboté, en particulier l'implication $\Rightarrow$. **Conclusion**.

$$\boxed{\text{L'ensemble-solution de } (E), \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \underbrace{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}_{=2 \operatorname{sh} x} - x + \dfrac{x \sin x}{2} \end{array} \; / \; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}}.$$